

რაინერის დრეკადი მასალებისათვის იერარქიული მათემატიკური მოდელების აგება



ნაშრომი წარდგენილია გამოყენებითი მათემატიკის მეცნიერებათა მაგისტრის ხარისხის
მოსაპოვებლად

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გამოყენებითი მათემატიკა

მაგისტრანტი: მარიამ კოხრეიძე

ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი გიორგი ჯაიანი

თბილისი

2023

სარჩევი

ანოტაცია	2
შესავალი	2
1 დამხმარე მასალები	5
1.1 რაინერის დრეკადი მასალის ველის განტოლებები \mathbb{R}^3	5
1.2 სხეულის(გარემოს) გეომეტრია	7
1.3 მათემატიკური მომენტები ¹	10
2 იერარქიული მოდელის აგება	15
2.1 უსასრულო სისტემა	15
2.2 N – ური მიახლოება	23
2.3 $N=0$ მიახლოება	26
2.4 $N=1$ მიახლოება	27
2.5 რაინერის დრეკადი პრიზმული გარსები ხარისხოვანი წამახვილებით	29
3 დასკვნა	32
4 ციტირებული ლიტერატურა	33
5 აღნიშვნების ნუსხა	35

¹მკითხველისათვის მოხერხებული პირობების შესაქმნელად აქ, როგორც დამხმარე მასალა, სრულად მოგვეყავს § 10 გ.ჯაიანი[27]-დან (იხ. გვ.77-80, სადაც რეკურენტული ფორმულებიდან მიღებული ი.ვეკუას უსასრულო ჯამის სახით ჩაწერილი ფორმულები შეცვლილია სასრული ფორმის ცხადი ფორმულებით),იხ. აგრეთვე I.Vekua [1],I.Vekua [28],

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში განზომილების რედუქციის ილია ვეკუას მეთოდის გამოყენებით, აგებულია იერარქიული მოდელები რაინერის დრეკადი მასალის სხეულებისთვის, გარკვეული აზრით გაწრფივებულ კონსტიტუციურ დამოკიდებულებების შემთხვევაში. სხეულს(გარემოს) უკავია პრიზმული გარსისნაირი არე $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ლიპშიცური და არალიპშიცური საზღვრით. დასმულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანები N -ურ მიახლოებაში. განხილულია წამახვილებული პრიზმული გარსის შემთხვევაში სასაზღვრო პირობების Ω -ს $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ პროექციის საზღვარზე დასმის თავისებურებები.

Annotation

The present master work is devoted to construction, using I.Vekua's dimension reduction method, for the Reiner elastic bodies, in the some sense linearized case. The shell-like domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ with both Lipschitz and Non-Lipschitz boundaries is occupied by the Reiner elastic material. In the N -th approximation initial-boundary value problems are posed. The peculiarities of settling the boundary conditions for cusped prismatic shells is discussed in the projection $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ of Ω

შესავალი

მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში დასაბამი მიეცა წამახვილებული პრიზმული გარსების, კერძოდ, ფირფიტების კვლევას, სახელდობრ, 1955 წელს ი. ვეკუამ (იხ. [1]) წამოჭრა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების შესწავლის საკითხი, როცა ფირფიტის სისქე მთელ საზღვარზე ან მის ნაწილზე ნული ხდება (მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა). პრაქტიკაში ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა, მაგალითად, სტადიონების სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა.შ., გარდა ამისა მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარანდავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). წამახვილებული ფირფიტების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ, არალიპშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანას მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე განტოლებებისა და

სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების (ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების (ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისათვის) დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხამდე [შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით იხ. მიმოხილვები [2],[3],[4]-ში აგრეთვე ი. ვეკუას კომენტარები [1]-ში (გვ. 86)].

მეოცე საუკუნის 50-ან წლებში ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ. პრიზმული გარსების, კერძოდ, ცვლადი სისქის ფირფიტების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გამლის პირველი $N + 1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ. N -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელის იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება $N = 0, 1, \dots$ შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. 60-იან წლებში ი. ვეკუამ [5] განავითარა ანალოგიური მათემატიკური მოდელი თხელი დამრეცი გარსებისათვის. ფირფიტებსა და გარსებთან დაკავშირებული ყველა მისი შედეგი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში [6]. ი. ბაბუშკას, დ. გორდეზიანის, ვ. გულიაევის, ი. ხომას, თ. მეუნარგიას, კ. შვაბის, თ. ვაშაყმაძის, ვ. ჟღენცის და სხვათა შრომები (იხ. [2],[7-17] და იქ მითითებული ლიტერატურა) მიედვნა ი. ვეკუას მოდელის შემდგომ ანალიზს, სახელდობრ, მოდელირების და რიცხვითი ამონახსნის ცდომილების ზუსტ შეფასებას, მოდელის განზოგადებას არადამრეცი გარსებისათვის, ან იზოტროპულ შემთხვევას და სხვა. ამასთან, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, მან დასვა საკითხი ისეთი პრიზმული გარსების გამოკვლევის თაობაზე, რომელთა სისქე გარსის საზღვრის ნაწილზე ან მთელ საზღვარზე ნული ხდება (იხ. ი. ვეკუას კომენტარი [6]-ში (გვ. 86)). მან იმ ფირფიტებს და გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება „წამახვილებული“ ფირფიტები და გარსები უწოდა.

მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ, რისთვისაც მან ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები გაშალა ორმაგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივად ღეროს სიგანისა და სისქის მიმართ([18]).

ზოგიერთი ამოცანა წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისათვის, რომელთა სისქე, ცხადია, ცვალებადია, გამოკვლეული იყო მ. მახოვერის, ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ. ჯაიანის, გ. ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ს. ნაგულესვარანის, ნ. ჩინჩალაძის და ს. ხარიბეგაშვილის შრომებში (იხ. [19] და მიმოხილვები [2],[18],[4]-ში და იქვე მითითებული ლიტერატურა). ამ ავტორების ნაშრომები ძირითადად ეძღვნება ხარისხოვანი ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტების და ღეროების შესწავლას ბერნული-ვილერის ღეროების, კირსჰოფის ფირფიტების და ი. ვეკუას იერარქიული მოდელის ნულოვანი და პირველი მიახლოებების ბაზაზე.

[20]-ში მეუნარგიას განზომილების რედუქციის ი. ვეკუას მეთოდის გამოყენებით აგებული აქვს იერარქიული მოდელები გეომეტრიულად და ფიზიკურად არაწრფივი, არადამრეცი გარსებისთვის, [21]-ში ლიპშიცის არეების შემთხვევაში გ. ჯაიანმა, ს. ხარიბეგაშვილმა, დ. ნატროშვილმა და ვ. ვენდლანდმა აა-

გეს ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელები დრეკადი წამახვილებული პრიზმული გარსებისათვის. ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით სათანადო წონიან ფუნქციონალურ სივრცეებში დამტკიცებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები შესაბამისი ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანებისათვის. ამ ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების საშუალებით აგებულია სამგანზომილებიანი არისათვის მიახლოებითი ამონახსნების მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა სობოლევის H^1 სივრცეში კრებადია ამოსავალი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისაკენ. ცხადი სახით არის ამოწერილი ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები ზოგადი ორთოგონალური სისტემისათვის და, კერძოდ, ლეჟანდრის პოლინომებისათვის.

შემთხვევებს, როცა პრიზმული გარსის სისქე საზღვარზე ნულდება მიეძღვნა ე. მახოვერის, ს. მიხლინის, ა. ხვოლესის, გ. ჯაიანის, დ. ნატროშვილის, ს. ხარიბეგაშვილის, ვ. ვენდლანდის [21], გ. ჯაიანი [15], ნ. ჩინჩალაძის [12], ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის [22] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [4]) და სხვათა შრომები. ნ. ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის, ბ. მაისტრენკოს და პ. პოდოლ-გუიდულის [23] მიერ იერარქიული მოდელების ფარგლებში შესწავლილი იყო წამახვილებულ პრიზმულ სხეულებში შინაგანი შეყურსული ძალების წარმოქმნის საკითხი. შემდგომში ი. ვეკუას მეთოდის განზოგადებით განხილული იყო დრეკადი ღეროების ერთგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების აგების და გამოკვლევის საკითხები გ. ჯაიანის [2] და მ. და გ. ავალიშვილების [7-9] (იხ. აგრეთვე ნ. ჩინჩალაძე, რ. ჯილბერტი, გ. ჯაიანი, ს. ხარიბეგაშვილი, დ. ნატროშვილი [17]) მიერ. წამახვილებულ სტანდარტულ და პრიზმულ გარსებთან, ფირფიტებთან და ღეროებთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები დაწვრილებით არის მიმოხილული გ. ჯაიანის [16] მონოგრაფიაში.

უფრო ვრცელი და დეტალური მიმოხილვა განზომილებების რედუქციის ი. ვეკუას მეთოდის, პრიზმული და სტანდარტული გარსების იერარქიული მოდელების, მათი მნიშვნელობის, წამახვილებების თავისებურებების, ნაპირზე სასაზღვრო პირობების დასმის არაკლასიკურობის თვალსაზრისით [იხ. [24]]

სამაგისტრო ნაშრომის მიზანია განზომილებების რედუქციის ილია ვეკუას მეთოდის გამოყენებით, ავად იერარქიული მოდელები რაინერის დრეკადი მასალის სხეულებისთვის, გარკვეული აზრით გაწრფივებულ კონსტიტუციურ დამოკიდებულებების შემთხვევაში, როცა სხეულს(გარემოს) უკავია პრიზმული გარსისნაირი არე $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ლიპშიცური და არალიპშიცური საზღვრით. განვიხილოთ წამახვილებული პრიზმული გარსის შემთხვევაში სასაზღვრო პირობების Ω -ს $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$ პროექციის საზღვარზე დასმის თავისებურებები.

სამაგისტრო ნაშრომი შედგება ანოტაციის, შესავლის, 2 თავის, 8 პარაგრაფის, დასკვნისა, ციტირებული ლიტერატურის 29 დასახელებისა და აღნიშვნების ნუსხისაგან.

1 დამხმარე მასალები

1.1 რაინერის დრეკადი მასალის ველის განტოლებები \mathbb{R}^3

ვთქვათ, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ არის არე, რომელიც რაინერის დრეკად სხეულს უკავია.

მოძრაობის განტოლებები

$$X_{j,i,j} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad \begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ t &> t_0, \quad i, j = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

სადაც $X_{ij} \in C^1(\Omega)$ არის ძაბვის ტენზორის კომპონენტები (x_i ნორმალის მქონე ფართზე მოქმედი ძაბვის გეგმილი x_j ღერძზე); Φ_i არის მოცულობითი ძალის კომპონენტები; ρ სიმკვრივე; $u_i \in C^2(\Omega)$ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები (გადაადგილებები);

შენიშვნა: გამოყენებულია აინშტაინის ინდექსები, რომლებიც გულისხმობს შემდეგ შეთანხმებებს:

1. თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში ორჯერ გვხვდება, ვგულისხმობთ, რომ ხდება აჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობას 1,2,3, ხოლო ბერძნული კი 1,2);
2. მძიმის შემდეგ ინდექსი მიუთითებს კერძო წარმოებულზე შესაბამისი ცვლადით (დეკარტის $Ox_1x_2x_3$ სისტემაში). (ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ წარმოებულები არის უწყვეტი, თუ არ იქნება სხვა მინიშნება გაკეთებული);
3. სიმბოლოების ზემოთ დაწერილი წერტილები მიუთითებს დროითი t ცვლადით წარმოებულს .

კინემატიკური დამოკიდებულებები (გომეტრიულად წრფივი შემთხვევა)²

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (1.1.2)$$

კონსტიტუციური დამოკიდებულებები³

$$X_{ji} = X_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 e_{ji} + \varphi_2 e_{ik} e_{kj} \quad i, j, k = \overline{1, 3} \quad (1.1.3)$$

სადაც $e_{ij} \in C^1(\Omega)$ არის დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები; φ_i , ($i = \overline{1, 3}$) კოეფიციენტები დეფორმაციის ტენზორის მთავარ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ინვარიანტებზეა დამოკიდებული, რომლებიც თავის მხრივ არის

² გადავადებულია $u_{k,i} u_{k,j}$ არაწრფივი წევრი

³ იხ. C.Truesdell, A First Course in Relational Continuum Mechanics, ციტირებული ლიტერატურა [25]

t -ს ფუნქციას, ზოგად არასტაციონალურ შემთხვევაში;

$$\theta_1 := e_{ii},$$

$$\theta_2 := \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

$$\theta_3 := \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}$$

რომელიც ტოლფასია

$$\theta_1 = e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\theta_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_3 e_2,$$

$$\theta_3 = e_1 e_2 e_3.$$

სადაც e_1, e_2, e_3 არის $e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0$ განტოლების ამონახსნი.⁴

ი.ვეკუას რედუქციის მეთოდის გამოსაყენებლად საჭიროა, (1.1.1) განტოლების კოეფიციენტები არ იყოს დამოკიდებული x_3 ცვლადზე.

საწყის-სასაზღვრო პირობები აქ დაისმის, ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში. განვიხილოთ დინამიკის შერეული ამოცანები კოშის საწყისი პირობით.

ვთქვათ, მოცემულია სხეულის ზედაპირზე მოქმედი გარე ძაბვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.1.1) და (1.1.2) განტოლებათა სისტემას Ω არეში, და ასევე მოცემულია საზღვრის წერტილთა გადაადგილებები (დირიხლეს ამოცანა)

$$\begin{aligned} u_i|_{\Gamma_0} &= f_i & \Gamma_0 - \text{ზე,} \\ X_{ij} n_j|_{\Gamma_1} &= g_i & \Gamma_1 - \text{ზე,} \quad \partial\Omega = \overline{\Gamma_0} \cup \Gamma_1, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

კოშის საწყისი პირობა:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega \quad (1.1.5)$$

⁴ იხ. გ.ჯაიანი, უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, გვ.76,, ციტირებული ლიტერატურა [26]

$\vec{n} := (n_1, n_2, n_3)$ არის $\partial\Omega$ გარე ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორი. (f_1, f_2, f_3) და (g_1, g_2, g_3) არის მოცემული გადაადგილების და ძაბვის ვექტორი, ხოლო u^0 და u^1 არის საწყისი გადაადგილების და სინქარის ვექტორი.

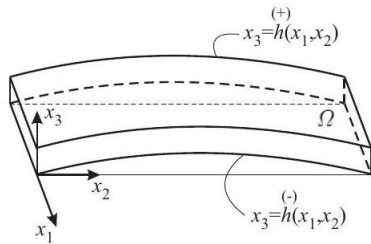
1.2 სხეულის(გარემოს) გეომეტრია

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია ზედაპირებით:

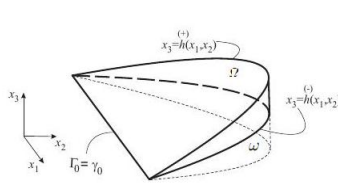
$$x_3 = \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) \in C^2(\omega) \text{ და } x_3 = \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \in C^2(\omega), \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$

ხოლო გვერდიდან ცილინდრული ზედაპირით x_3 ღერძის პარალელური მსახველით, პრიზმული გარსი ეწოდება.(იხ. ნახ. 1)

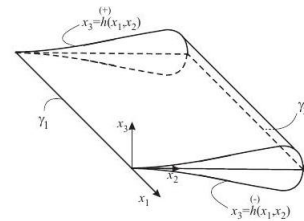
ω არის Ω -ს პროექცია Ox_1x_2 სიბრტყეზე, როცა $x_3 = 0$.



ნახ. 1: მუდმივი სისქის პრიზმული გარსი, $\partial\Omega$ ლიპშიცის საზღვრით



ნახ. 2: წამახვილებული პრიზმული გარსი ნახევარწრეწირის პროექციით. $\partial\Omega$ ლიპშიცის საზღვრით.



ნახ. 3: წამახვილებული ფირფიტა, მჭრელი (ბასრი) γ_1 და ბლაგვი γ_2 პირით, $\gamma^0 := \gamma_1 \cup \gamma_2$. $\partial\Omega$ ლიპშიცის საზღვრით

$$2h(x_1, x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) > 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

არის პრიზმული გარსის სისქე. $\partial\Omega$ -ს ნაწილს, სადაც $2h = 0$, ე.ი როცა სისქე აღარ აქვს წამახვილებული პირი ეწოდება. თუ $\partial\Omega$ ნაწილი გლუვია - ბლაგვი.(იხ. ნახ. 2, ნახ. 3).

ვთქვათ,

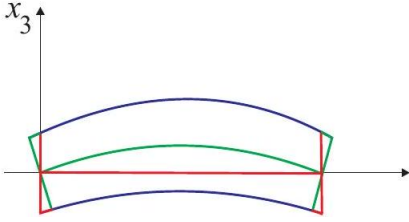
$$2\tilde{h}(x_1, x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) + \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$

სიმეტრიული პრიზმული გარსის შემთხვევაში, ე.ი როცა

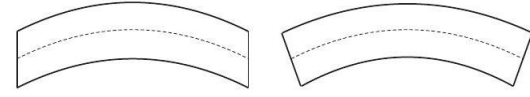
$$\overset{(-)}{h}(x_1, x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)$$

ცხადია

$$2\tilde{h}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega.$$



ნახ. 4: პრიზმული და სტანდარტული გარსების კვეთების შედარება



ნახ. 5: პრიზმული(მარცხნივ) და სტანდარტული გარსების კვეთები, ერთი და იგივე შუა ზედაპირით

განსხვავება მუდმივი სისქის პრიზმულ გარსსა და მუდმივი სისქის სტანდარტულ გარსს შორის ნაჩვენებია ნახ.4-სა და ნახ.5-ზე, სადაც მუდმივი სისქის პრიზმული გარსის კვეთები მის პროექციასთან და მუდმივი სისქის სტანდარტული გარსის შუა ზედაპირით მოცემულია წითელ და მწვანე ფერებში, შესაბამისად საერთო ნაწილები ლურჯით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სტანდარტული გარსის გვერდითი საზღვარი ორთოგონალურია გარსის "შუა ზედაპირის" , ხოლო პრიზმული გარსის გვერდითი საზღვარი ორთოგონალურია პრიზმული გარსის პროექციის $x_3 = 0$ სიბრტყეზე. (იხ. ნახ.4).

კერძოდ, ვთქვათ ω არის არე, შემოსაზღვრული საკმარისად გლუვი რკალით $(\partial\omega \setminus \overline{\gamma^0})$, რომელიც განთავსებულია $x_2 > 0$ ნახევარსიბრტყეში და x_1 -ღერძის $\overline{\gamma^0}$ სეგმენტზე. (იხ. ნახ.2, ნახ.3) სისქით

$$2h(x_1, x_2) = 2h_0 x_2^\kappa, \quad h_0, \kappa = \text{const} > 0$$

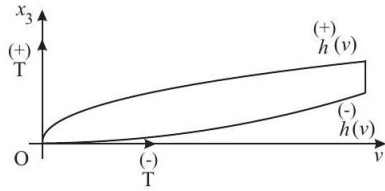
რაც იგივეა

$$\overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2) = \overset{(\pm)}{h_0} x_2^\kappa, \quad \overset{(\pm)}{h_0} = \text{const}, \quad \overset{(+)}{h_0} > \overset{(-)}{h_0}, \quad 2h_0 := \overset{(+)}{h_0} - \overset{(-)}{h_0}$$

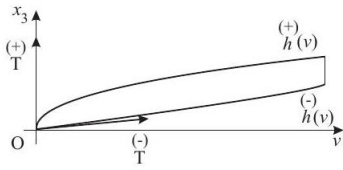
განვიხილოთ, ბლავი ზედაპირისთვის $\kappa < 1$ და წამახვილებული ზედაპირისთვის $\kappa \geq 1$.

ნახ. 6-20 (φ არის მახვილი კუთხე T და T მხებებს შორის, ν არის შიგა ნორმალის O -დან $\partial\omega$ -სკენ). ვაჩვენოთ, რამდენიმე დამახასიათებელი (ტიპიური) შემთხვევები წამახვილებული პრიზმული გარსების.

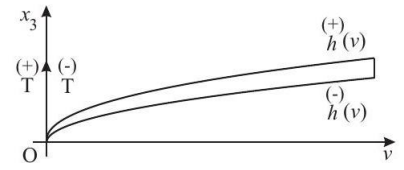
პირველ რიგში, განვიხილავთ ω დადებითი სისქის ზოგად შემთხვევას. ე.ი პრიზმულ გარსს არ აქვს წამახვილებული კიდეები.



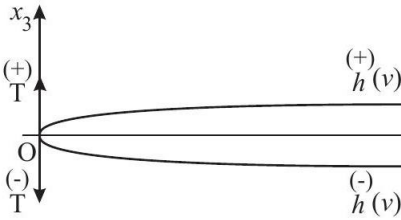
ნახ. 6: ბლაგვად წამახვილებული პრიზმული გარსის განივმკვეთი ($\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$) ლიპშიცის საზღვრით



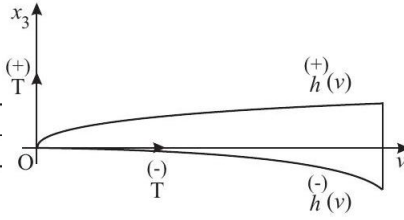
ნახ. 7: ბლაგვად წამახვილებული პრიზმული გარსის განივმკვეთი ($\hat{\varphi} \in]0, \frac{\pi}{2}[$) ლიპშიცის საზღვრით



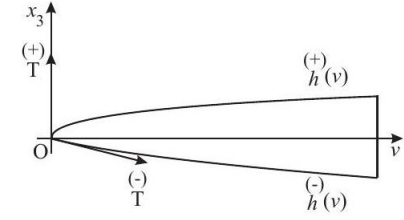
ნახ. 8: ბლაგვად წამახვილებული პრიზმული გარსის განივმკვეთი ($\hat{\varphi} = 0$) ლიპშიცის საზღვრით



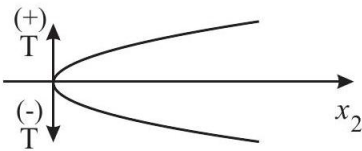
ნახ. 9: ბლაგვად წამახვილებული ფირფიტის მკვეთი ($\hat{\varphi} = \pi$) ლიპშიცის საზღვრით



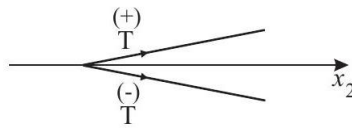
ნახ. 10: ბლაგვად წამახვილებული პრიზმული გარსის მკვეთი ($\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$) ლიპშიცის საზღვრით



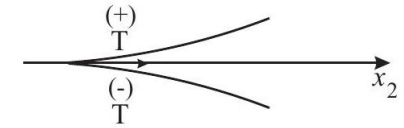
ნახ. 11: ბლაგვად წამახვილებული პრიზმული გარსის განივმკვეთი ($\hat{\varphi} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$) ლიპშიცის საზღვრით



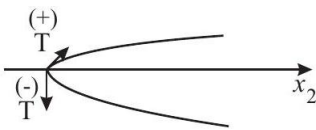
ნახ. 12: $\hat{\varphi} = \pi$



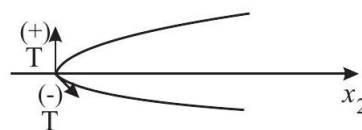
ნახ. 13: სოლისებრი, $\hat{\varphi} \in]0, \pi[$



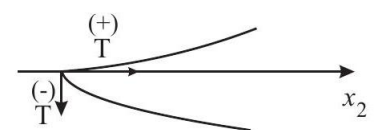
ნახ. 14: $\hat{\varphi} = 0$



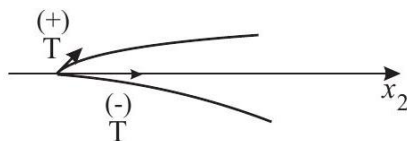
ნახ. 15: $\frac{\pi}{2} < \hat{\varphi} < \pi$



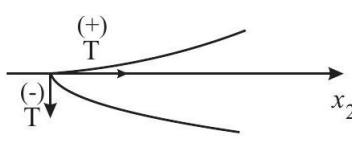
ნახ. 16: $\frac{\pi}{2} < \hat{\varphi} < \pi$



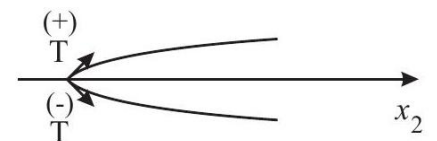
ნახ. 17: $\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$



ნახ. 18: $0 < \hat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$



ნახ. 19: $0 < \hat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$



ნახ. 20: $0 < \hat{\varphi} < \pi$

1.3 მათემატიკური მომენტები⁵

ვთქვათ $f(x_1, x_2, x_3)$ მოცემული ფუნქციაა, რომელსაც $\bar{\Omega}$ -ის შიგა წერტილებში გააჩნია კერძო წარმოებულები, f_r -ით აღვნიშნოთ მისივე r რიგის მომენტი, რომელიც შემდეგნაირად განიშარტება

$$f_r(x_1, x_2) := \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) P_r(ax_3 - b) dx_3 \quad (1.3.1)$$

სადაც

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2) &:= \frac{1}{h(x_1, x_2)}, & b(x_1, x_2) &:= \frac{\tilde{h}(x_1, x_2)}{h(x_1, x_2)}, \\ 2h(x_1, x_2) &= h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2) > 0, \\ 2\tilde{h}(x_1, x_2) &= h^{(+)}(x_1, x_2) + h^{(-)}(x_1, x_2) > 0, \end{aligned}$$

და

$$P_r(\tau) = \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r (\tau^2 - 1)^r}{d\tau^r}, \quad r = 0, 1, \dots$$

r რიგის ლეჟანდრის პოლინომებია, რომლებიც ორთოგონალურია $[-1, 1]$ სეგმენტზე.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\tau) P_n(\tau) d\tau = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}$$

აქედან, ჩასმით

$$\tau = ax_3 - b = \frac{2}{h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2)} x_3 - \frac{h^{(+)}(x_1, x_2) + h^{(-)}(x_1, x_2)}{h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2)},$$

გვაქვს

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) a \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} P_m(ax_3 - b) P_n(ax_3 - b) dx_3 = \delta_{mn}$$

ცნობილი ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით (x_3 -ის მიმართ) და დიფერენციალი ინტეგრალის პარამეტრის მიმართ დამოკიდებულია (x_α), თუ გავითვალისწინებთ, რომ $P_r(1) = 1, P_r(-1) = (-1)^r$, დავასკვნით, რომ

⁵ მკითხველისათვის მოხერხებული პირობების შესაქმნელად აქ, როგორც დამხმარე მასალა, სრულად მოგვეყავს § 10 გ.ჯაიანი[27]-დან (იხ. გვ. 77-80, სადაც რეკურენტული ფორმულებიდან მიღებული ი.ვეკუას უსასრულო ჯამის სახით ჩაწერილი ფორმულები შეცვლილია სასრული ფორმის ცხადი ფორმულებით), იხ. აგრეთვე I.Vekua [1], I.Vekua [28],

$$\begin{aligned}
\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P_r(ax_3 - b) f_{,3} dx_3 &= -a \int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P'_r(ax_3 - b) f dx_3 + f^{(+)} - (-1)^r f^{(-)} \\
\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P_r(ax_3 - b) f_{,\alpha} dx_3 &= f_{r,\alpha} - f^{(+)(+)} h_{,\alpha} + (-1)^r f^{(-)(-)} h_{,\alpha} \\
&\quad - \int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P'_r(ax_3 - b) (a_{,\alpha} x_3 - b_{,\alpha}) f dx_3, \quad \alpha = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

სადაც $(\cdot)'$ -ში იგულისხმება $(ax_3 - b)$ არგუმენტის მიმართ დიფერენცირება, ხოლო (\cdot) , - ვგულისხმობთ კერძო წარმოებულს შესაბამისი ცვლადებით, $f^{(\pm)} := f \left[x_1, x_2, h^{(\pm)}(x_1, x_2) \right]$. ლეჟანდრის მრავალწევრების თეორიიდან შემდეგი მიმართებების გამოყენებით

$$P'_r(\tau) = \sum_{s=0}^r (2s+1) \frac{1 - (-1)^{r+s}}{2} P_s(\tau) \quad 6 \tag{1.3.3}$$

$$\tau P'_r(\tau) = r P_r(\tau) + P'_{r-1}(\tau) = r P_r(\tau) + \sum_{s=0}^{r-1} (2s+1) \frac{1 + (-1)^{r+s}}{2} P_s(\tau) \quad 7 \tag{1.3.4}$$

იმის გათვალისწინებით, $\frac{a_{,\alpha}}{a} = (\ln a)' = -\frac{h_{,\alpha}}{h}$, $\frac{a_{,\alpha} b}{a} = \tilde{h} a_{,\alpha}$, $b_{,\alpha} = (\tilde{h} a)_{,\alpha}$, მარტივი მისახვედრია, რომ

$$\begin{aligned}
P'_r(ax_3 - b) (a_{,\alpha} x_3 - b_{,\alpha}) &= \frac{a_{,\alpha}}{a} (ax_3 - b) P'_r(ax_3 - b) + \left(\frac{a_{,\alpha} b}{a} - b_{,\alpha} \right) P'_r(ax_3 - b) \\
&= -h_{,\alpha} h^{-1} (ax_3 - b) P'_r(ax_3 - b) - \tilde{h}_{,\alpha} h^{-1} P'_r(ax_3 - b) \\
&= -\overset{r}{a_{\alpha r}} P_r(ax_3 - b) - \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{\alpha_{\alpha s}} P_s(ax_3 - b) \quad 8
\end{aligned}$$

⁶ჯამი \sum ერთი და იგივე შედეგს იძლევა $r-1$ და r შემთხვევაში, რადგან ბოლო წევრი ნულის ტოლია.

⁷ჯამი \sum ერთი და იგივე შედეგს იძლევა $r-2$ და $r-1$ შემთხვევაში, რადგან ბოლო წევრი ნულის ტოლია.

სადგ

$$a_{\alpha r} := r \frac{h, \alpha}{h}, \quad a_{\alpha s} := (2s + 1) \frac{h, \alpha^{(+)} - (-1)^{r+s} h, \alpha^{(-)}}{2h}, \quad s \neq r.$$

(1.3.1) და (1.3.2)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned} & \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} P_r(ax_3 - b) f, \alpha dx_3 \\ &= f_{r, \alpha} + \sum_{s=0}^r a_{\alpha s} f_{s-} \frac{h, \alpha^{(+)} f_{s-}^{(+)} + (-1)^r f_{s-}^{(-)}}{h, \alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} P_r(ax_3 - b) f, 3 dx_3 = \sum_{s=0}^r a_{3s}^r f_{s+} \frac{h, \alpha^{(+)} f_{s+}^{(+)} - (-1)^r f_{s+}^{(-)}}{h, \alpha} \quad (1.3.6)$$

შესაბამისად.

$$a_{3s}^r := -(2s + 1) \frac{1 - (-1)^{s+r}}{2h}$$

ვთქვათ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{s=0}^{\infty} a \left(s + \frac{1}{2} \right) f_s(x_1, x_2) P_s(ax_3 - b) \quad (1.3.7)$$

მაშინ

⁸ აქედან

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{r-1} (2s + 1) \left[\frac{h, \alpha^{(+)} + (-1)^{r+s} h, \alpha^{(-)}}{2h} + \frac{\tilde{h}, \alpha^{(-)} - (-1)^{r+s} \tilde{h}, \alpha^{(+)}}{2h} \right] P_s(ax_3 - b) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(2s + 1)}{2h} \left(\frac{h, \alpha^{(+)} - h, \alpha^{(-)} + h, \alpha^{(+)} (-1)^{r+s} - h, \alpha^{(-)} (-1)^{r+s}}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{h, \alpha^{(+)} + h, \alpha^{(-)} - h, \alpha^{(+)} (-1)^{r+s} - h, \alpha^{(-)} (-1)^{r+s}}{2} \right) P_s(ax_3 - b) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} (2s + 1) \frac{h, \alpha^{(+)} - (-1)^{r+s} h, \alpha^{(-)}}{2h} P_s(ax_3 - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(\pm)} &:= f\left(x_1, x_2, \overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2)\right) = \sum_{s=0}^{\infty} a\left(s + \frac{1}{2}\right) f_s(\pm 1)^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^s (2s+1)}{2h} f_s,
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

ახევა

$$f^{(+)} - (-1)^r f^{(-)} = - \sum_{s=0}^{\infty} \overset{r}{a}_{3s} f_s, \tag{1.3.9}$$

$$f^{(+)(+)} \overset{(-)}{h}_{,\alpha} - (-1)^r f^{(-)(-)} \overset{(-)}{h}_{,\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{r^*}{a}_{\alpha s} f_s, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{1.3.10}$$

სადაც

$$\overset{r^*}{a}_{\alpha s} = \overset{r}{a}_{\alpha s}, \quad s \neq r, \quad \overset{r^*}{a}_{\alpha r} = (2r+1) \frac{h_{,\alpha}}{h}.$$

ჩავსვათ (1.3.10) და (1.3.9) (1.3.5)-სა და (1.3.6)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\int_{\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)} P_r(ax_3 - b) f_{,\alpha} dx_3 &= f_{r,\alpha} + \sum_{s=0}^r \overset{r}{a}_{\alpha s} f_s - \sum_{s=0}^{\infty} \overset{r^*}{a}_{\alpha s} f_s \\
&= f_{r,\alpha} + \sum_{s=r}^{\infty} \overset{r}{b}_{\alpha s} f_s,
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

სადაც

$$\overset{r}{b}_{js} := - \overset{r}{a}_{js}, \quad s > r;$$

$$\overset{r}{b}_{\alpha r} := \overset{r}{a}_{\alpha r} - \overset{r^*}{a}_{\alpha r} = -(r+1) \frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - \overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h} = -(r+1) \frac{h_{\alpha}}{h}, \quad \overset{r}{b}_{3r} = 0$$

და

$$\begin{aligned}
\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P_r(ax_3 - b) f_{,3} dx_3 &= \sum_{s=0}^r a_{3s} f_s - \sum_{s=0}^{\infty} a_{3s} f_s \\
&= - \sum_{s=r+1}^{\infty} a_{3s} f_s,
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

შესაბამისად.

თუ $f^{(+)}$ და $f^{(-)}$ ცნობილია (წინასწარ განსაზღვრულია), მაშინ (1.3.5) და (1.3.6)-დან თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$n_{\alpha}^{(\pm)} = \frac{\mp h_{,\alpha}^{(\pm)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(\pm)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(\pm)}{h_{,2}}\right)^2}}, \quad n_3^{(\pm)} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(\pm)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(\pm)}{h_{,2}}\right)^2}}.$$

ვიღებთ

$$\begin{aligned}
\int_{h(x_1, x_2)}^{(+)} P_r(ax_3 - b) f_{,\alpha} dx_3 &= f_{r,\alpha} + \sum_{s=0}^r a_{\alpha s} f_s \\
+ f^{(+)} n_{\alpha}^{(+)} \sqrt{1 + \left(\frac{(+)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(+)}{h_{,2}}\right)^2} &+ (-1)^r f^{(-)} n_{\alpha}^{(-)} \sqrt{1 + \left(\frac{(-)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(-)}{h_{,2}}\right)^2},
\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

და

$$\begin{aligned}
\int_{h(x_1, x_2)}^{(-)} P_r(ax_3 - b) f_{,\alpha} dx_3 &= \sum_{s=0}^r a_{\alpha s} f_s \\
+ f^{(+)} n_3^{(+)} \sqrt{1 + \left(\frac{(+)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(+)}{h_{,2}}\right)^2} &+ (-1)^r f^{(-)} n_3^{(-)} \sqrt{1 + \left(\frac{(-)}{h_{,1}}\right)^2 + \left(\frac{(-)}{h_{,2}}\right)^2},
\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

2 იერარქიული მოდელის აგება

2.1 უსასრულო სისტემა

ჩვენ ავსებთ იერარქიულ მოდელს პრიზმული გარსისნაირი $\Omega \in \mathbb{R}^3$ არეებისთვის, $\omega \in \mathbb{R}^2$ არის Ω -ს პროექცია. ვიგულისხმებთ, რომ აქვს $\partial\Omega$ ზოგადად არალიპშიცური⁹ საზღვარი.

r რიგის მომენტები შემდეგი სიდიდეებისთვის განისაზღვრება

$$(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr})(x_1, x_2, t) := \int_{\frac{(-)}{h}(x_1, x_2)}^{\frac{(+)}{h}(x_1, x_2)} (u_i, X_{ij}, e_{ij})(x_1, x_2, x_3, t) \times P_r(ax_3 - b) dx_3 \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (2.1.1)$$

ინტეგრალით, სადაც

$$P_r(ax_3 - b) \left(a(x_1, x_2) := \frac{2}{\frac{(+)}{h} - \frac{(-)}{h}} = \frac{1}{h}, \quad b(x_1, x_2) := \frac{\frac{(+)}{h} + \frac{(-)}{h}}{\frac{(+)}{h} - \frac{(-)}{h}} = \frac{\tilde{h}}{h} \right), \quad r = 0, 1, \dots$$

არის r რიგის ლეჟანდრის¹⁰ პოლინომი.

თუ დავუშვებთ, რომ x_3 ცვლადის მიმართ $X_{ij}, e_{ij}, u_i \in C^2$, მაშინ ფურიე-ლეჟანდრის შემდეგი მწკრივი კრებადია

$$(u_i, X_{ij}, e_{ij})(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a \left(r + \frac{1}{2} \right) \times (u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr})(x_1, x_2, t) \times P_r(ax_3 - b) \quad (2.1.2)$$

განსახილველი პრიზმული გარსის ზედა და ქვედა ზედაპირებზე

⁹ $\partial\Omega$ საზღვარს ეწოდება ლიპშიცის საზღვარი, თუ ეს ზედაპირი ლოკალურად აღიწერება ლიპშიცის აზრით უწყვეტი ფუნქციებით, ესე იგი ამ ფუნქციებისთვის არსებობს მუდმივი L რომ ადგილი აქვს

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{თუ } x \in R, \quad y \in R.$$

¹⁰ ლეჟანდრის პოლინომს აქვს სახე

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\tau^2 - 1)^n}{d\tau^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

კერძოდ

$$P_0(\tau) = 1, P_1(\tau) = \tau, P_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} u_i^{(\pm)} &:= u_i \left(x_1, x_2, \frac{(\pm)}{h} (x_1, x_2), t \right) = \sum_{s=0}^{\infty} a \left(s + \frac{1}{2} \right) u_{is} (\pm 1)^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^s (2s+1)}{2h} u_{is} \end{aligned}$$

საიდანბნე

$$u_i^{(+)} - (-1)^r u_i^{(-)} = - \sum_{s=0}^{\infty} a_{3s}^r u_{is}, \quad i = \overline{1,3}$$

$$u_i^{(+)} h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^r u_i^{(-)} h_{,\alpha}^{(-)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_{\alpha s}^r u_{is} \quad i = \overline{1,3}, \quad \alpha = 1, 2$$

სადაც

$$\begin{aligned} a_{\alpha s}^* &= a_{\alpha s}^r, \quad s \neq r, \quad a_{\alpha r}^* = (2r+1) \frac{h, \alpha}{h} \\ a_{\alpha s}^r &:= (2s+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - (-1)^{r+s} h_{,\alpha}^{(-)}}{2h}, \quad s \neq r, \quad a_{\alpha r}^r := r \frac{h, \alpha}{h}, \\ a_{3s}^r &:= -(2s+1) \frac{1 - (-1)^{s+r}}{2h} \end{aligned}$$

$$\left(b_{js}^r := -a_{js}^r, \quad s > r; \quad b_{js}^r = 0, \quad s < r; \quad b_{\alpha r}^r := a_{\alpha r}^r - a_{\alpha r}^* = -(r+1) \frac{h_{,\alpha}^{(+)} - h_{,\alpha}^{(-)}}{2h}, \quad b_{3r}^r = 0 \right).$$

(1.3.5), (1.3.6), ფორმულების გამოყენებით

$$\int_{h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} P_r(ax_3 - b) f_{,\alpha} dx_3 = f_{r,\alpha} + \sum_{s=0}^r a_{as}^r f_s - f_{h,\alpha}^{(+)(+)} + (-1)^r f_{h,\alpha}^{(-)(-)}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\int_{h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} P_r(ax_3 - b) f_{,3} dx_3 = \sum_{s=0}^r a_{3s}^r f_s + f_{h,3}^{(+)} - (-1)^r f_{h,3}^{(-)}$$

(1.1.1) - განტოლების გამრავლებით $P_r(ax_3 - b)$ -ზე $r = 0, 1, \dots$, და ინტეგრებით $h_{h(x_1, x_2)}^{(-)}$ და $h_{h(x_1, x_2)}^{(+)}$

საზღვრებში, სისქის ცვლადის x_3 მიმართ, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას ω -ში :

(1.3.13) და (1.3.14) ფორმულაში f -ის ნაცვლად, თუ ავიღებთ $X_{\alpha i}$ და X_{3i} , მივიღებთ

$$X_{\alpha ir, \alpha} + \sum_{s=0}^r a_{js}^r X_{jis} + \bar{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad r = 0, 1 \quad (2.1.3)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &:= X_{3j}^{(+)} - X_{\alpha j}^{(+)} h_{, \alpha}^{(+)} + (-1)^r \left[-X_{3j}^{(-)} + X_{\alpha j}^{(-)} h_{, \alpha}^{(-)} \right] + \Phi_{jr} \\ &= X_{ji}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{, 1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{, 2}^{(+)} \right)^2} + (-1)^r X_{ji}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{, 1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{, 2}^{(-)} \right)^2} + \Phi_{jr}, \\ & \qquad \qquad \qquad j = \overline{1, 3}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$X^{(+)}$ და $X^{(-)}$ არის ძაბვის ვექტორის კომპონენტები, რომელიც მოქმედებს $\binom{+}{n}$ და $\binom{-}{n}$ ნორმალეების მქონე ზედა და ქვედა ზედაპირებზე.

ხოლო (1.3.7) და (1.3.8) ფორმულაში f -ის ნაცვლად u_i -ის ადებით, ფურიე-ლეჟანდრის გამოსახულებებს ზედა და ქვედა ზედაპირისთვის ექნება შემდეგი სახე

$$u_i^{(\pm)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^s (2s+1)}{2h} u_{is}, \quad i = \overline{1, 3},$$

(1.3.11), (1.3.12)-ის გამოყენებით (1.1.2) ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$e_{ijr} = \frac{1}{2} (u_{ir, j} + u_{jr, i}) + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{is}^r u_{js} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} b_{js}^r u_{is}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (2.1.4)$$

$$\theta_{1r} := e_{iir} = u_{\gamma r, \gamma} + \sum_{s=r}^{\infty} b_{ks}^r u_{ks}, \quad \gamma = 1, 2 \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.1.5)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$b_{3r}^r = 0, \quad h^{r+1} (h^{-r-1}), \quad \alpha = b_{\alpha r}^r, \quad \alpha = 1, 2,$$

(2.1.4) შეგვიძლია ჩავწეროთ v_{ir} -ის ტერმინებში

$$v_{ir} := h^{-r-1} u_{ir}$$

როგორც

$$e_{ijr} = \frac{1}{2}h^{r+1}(v_{ir,j} + v_{jr,i}) + \frac{1}{2} \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1} \left(b_{is}^r v_{js} + b_{js}^r v_{is} \right), \quad i, j = \overline{1,3}, r = 0, 1, \dots, \quad (2.1.6)$$

$$\theta_{1r} := e_{iir} = h^{r+1}v_{\gamma r, \gamma} + \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1} b_{ks}^r v_{ks}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.1.7)$$

განვიხილოთ რეინერის დრეკადი მასალის განტოლების გაწრფივებული ფორმა, ამისათვის, პირველ რიგში, გავშალოთ ტეილორის მწკრივად φ_0, φ_1 და φ_2 კოეფიციენტები $\theta_0 = (0, 0, 0)$ წერტილის მიდამოში და მოვჭრათ პირველ რიგამდე ჩათვლით. გვექნება

$$\varphi_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := \varphi_0(\theta_0) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_1}(\theta_0)\theta_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_2}(\theta_0)\theta_2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_3}(\theta_0)\theta_3$$

$$\varphi_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$$

სადაც

$$a_0 = \varphi_0(\theta_0), \quad a_1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_1}(\theta_0), \quad a_2 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_2}(\theta_0), \quad a_3 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_3}(\theta_0)$$

$$\varphi_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := \varphi_1(\theta_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1}(\theta_0)\theta_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_2}(\theta_0)\theta_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_3}(\theta_0)\theta_3$$

$$\varphi_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = b_0 + b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3$$

სადაც

$$b_0 = \varphi_1(\theta_0), \quad b_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1}(\theta_0), \quad b_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_2}(\theta_0), \quad b_3 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_3}(\theta_0)$$

$$\varphi_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := \varphi_2(\theta_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1}(\theta_0)\theta_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2}(\theta_0)\theta_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_3}(\theta_0)\theta_3$$

$$\varphi_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = c_0 + c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + c_3\theta_3$$

სადაც

$$c_0 = \varphi_2(\theta_0), \quad c_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_1}(\theta_0), \quad c_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2}(\theta_0), \quad c_3 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_3}(\theta_0)$$

დეფორმაციის ტენზორის ინვარიანტებისა და რეინერის დრეკადი მასალის განტოლების ფორმის

გათვალისწინებით, წრფივი ნაწილის გამოსაყოფად აუცილებელია, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$a_2 = a_3 = 0; \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0; \quad c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

საბოლოოდ, მივიღებთ შემდეგ გაწრფივებულ კონსტიტუციურ დამოკიდებულებებს

$$X_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = (a_0 + a_1\theta_1(x_1, x_2, x_3, t))\delta_{ij} + b_0e_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (2.1.8)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $a_0 = 0$, $a_1 = \lambda$ და $b_0 = 2\mu$ მივიღებთ დრეკადობის კლასიკურ თეორიის

$$X_{ij} = \lambda\theta_1\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

ჰუკის განზოგადებულ კანონს იზოტროპულ შემთხვევაში).

მომენტებზე გადასასვლელად (2.1.8) გავამრავლოთ ლეჟანდრის $P_r(ax_3 - b)$ პოლინომზე და ვაინტეგრროთ x_3 -ის მიმართ $h^{(-)}(x_1, x_2)$ -დან $h^{(+)}(x_1, x_2)$ -მდე. მივიღებთ

$$X_{ijr}(x_1, x_2, t) = (0 + a_1\theta_{1r}(x_1, x_2, t))\delta_{ij} + b_0e_{ijr}(x_1, x_2, t) \quad i, j = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots \quad (2.1.9)$$

$$X_{ij0}(x_1, x_2, t) = (2a_0h + a_1\theta_{10}(x_1, x_2, t))\delta_{ij} + b_0e_{ij0}(x_1, x_2, t), i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.10)$$

რადგან

$$\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} a_0 P_r(ax_3 - b) dx_3 = a_0 \int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} P_0(ax_3 - b) P_r(ax_3 - b) dx_3 = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.1.11)$$

და

$$\int_{h^{(-)}(x_1, x_2)}^{h^{(+)}(x_1, x_2)} a_0 P_0(ax_3 - b) dx_3 = 2a_0h \quad (2.1.12)$$

(2.1.4)-ის და (2.1.5) გამოყენებით გვექნება,

$$X_{ijr} = \left(a_1 u_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r}^{\infty} {}^r b_{ks} u_{ks} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} b_0 (u_{ir,j} + u_{jr,i}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=r}^{\infty} \left({}^r b_{is} u_{js} + {}^r b_{js} u_{is} \right) \quad (2.1.13)$$

$i, j = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots$

$$X_{ij0} = \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=0}^{\infty} {}^0 b_{ks} u_{ks} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} b_0 (u_{i0,j} + u_{j0,i}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=0}^{\infty} \left({}^0 b_{is} u_{js} + {}^0 b_{js} u_{is} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1.14)$$

თუ აღვნიშნავთ

$$v_r := \frac{u_r}{h^{r+1}}$$

v_{ir} -ის ტერმინებში გადაიწერება როგორც

$$X_{ijr} = \left(a_1 h^{r+1} v_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1} {}^r b_{ks} v_{ks} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} b_0 h^{r+1} (v_{ir,j} + v_{jr,i}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1} \left({}^r b_{is} v_{js} + {}^r b_{js} v_{is} \right) \quad (2.1.15)$$

$i, j = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots$

$$X_{ij0} = \left(2a_0 h + a_1 h v_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=1}^{\infty} h^{s+1} {}^0 b_{ks} v_{ks} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} b_0 h (v_{i0,j} + v_{j0,i}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=1}^{\infty} h \left({}^0 b_{is} v_{js} + {}^0 b_{js} v_{is} \right) \quad (2.1.16)$$

$i, j = \overline{1, 3}$

ამგვარად, მომენტებზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ (1.1.1),(1.1.2),(2.1.8) სისტემის ეკვივალენტურ (2.1.3),(2.1.4)

(2.1.13),(2.1.14) უსასრულო სისტემას X_{ijr}, e_{ijr}, u_{ir} -ის r რიგის მომენტების მიმართ. (2.1.13)-ის და

(2.1.14)-ის ჩასმით (2.1.3)-ში მივიღებთ შემდეგ ეკვივალენტურ უსასრულო r რიგის მემენტების სისტემას u_{ir} -ის მიმართ

$$\begin{aligned} & \left(a_1 u_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r}^{\infty} b_{ks}^r u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^{\infty} \left(b_0 b_{\alpha s}^r u_{is} + b_0 b_{is}^r u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} \\ & + \sum_{s=0}^r a_{js}^r \left[\left(a_1 u_{\gamma s, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s}^{\infty} b_{ks'}^s u_{ks'} \right) \delta_{ji} + \frac{1}{2} b_0 (u_{js, i} + u_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s}^{\infty} \left(b_{js'}^s u_{is'} + b_{is'}^s u_{js'} \right) \right] \quad (2.1.17) \\ & + X_i^r = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=0}^{\infty} b_{ks}^0 u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha})_{,\alpha} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \left(b_0 b_{\alpha s}^0 u_{is} + b_0 b_{is}^0 u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} + X_i^0 = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.1.18) \end{aligned}$$

დროის და სივრცის მიმართ ერთგვაროვნობის შემთხვევაში სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 u_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r}^{\infty} b_{ks}^r u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=r}^{\infty} \left(b_{\alpha s}^r u_{is} + b_{is}^r u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} + \\ & \sum_{s=0}^r a_{js}^r \left[\left(a_1 u_{\gamma s, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s}^{\infty} b_{ks'}^s u_{ks'} \right) \delta_{ji} + \frac{1}{2} b_0 (u_{js, i} + u_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s}^{\infty} \left(b_{js'}^s u_{is'} + b_{is'}^s u_{js'} \right) \right] + \quad (2.1.19) \\ & X_i^r = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=0}^{\infty} b_{ks}^0 u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=0}^{\infty} \left(b_{\alpha s}^0 u_{is} + b_{is}^0 u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} + \\ & X_i^0 = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.1.20) \end{aligned}$$

გავამრავლოთ (2.1.3) ტოლობა h^r -ზე და გავითვალისწინოთ

$$\alpha_{\alpha r}^r = r h^{-1} h, \alpha, \quad v_{ir} = \frac{u_{ir}}{h^{r+1}}$$

მივიღებთ

$$(h^r X_{\alpha ir})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} a_{js}^r X_{jis} + h^r \overset{r}{X}_i = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{ir}}{\partial t^2}, \quad (2.1.21)$$

$$\sum_{s=0}^{-1} (\dots) \equiv 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad r = 0, 1, \dots.$$

ჩვენს ვატი (2.1.15), (2.1.16) გამოცხადებულები (2.1.21)-ში. მივიღებთ ექვივალენტურ სისტემას v_{ir} -ის მიმართ:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ks} v_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \\ & + \frac{1}{2} (b_0 h^{2r+1} (v_{\alpha r, i} + v_{ir, \alpha}))_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(b_0 \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{2r+1} \left(\overset{r}{b}_{\alpha s} v_{is} + \overset{r}{b}_{is} v_{\alpha s} \right) \right)_{,\alpha} + \\ & + \sum_{s=0}^{r-1} a_{js}^r \left[\left(a_1 h^{r+s+1} v_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s+1}^{\infty} h^{r+s'+1} \overset{s}{b}_{ks'} v_{ks'} \right) \delta_{ji} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_0 h^{r+s+1} (v_{js, i} + v_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s+1}^{\infty} h^{r+s+1} \left(\overset{s}{b}_{js'} v_{is'} + \overset{s}{b}_{is'} v_{js'} \right) \right] \\ & + h^r \overset{r}{X}_i = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{ir}}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1,3}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 h v_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=1}^{\infty} h^{s+1} \overset{0}{b}_{ks} v_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \\ & + \frac{1}{2} (b_0 h (v_{\alpha 0, i} + v_{i0, \alpha}))_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(b_0 \sum_{s=1}^{\infty} h \left(\overset{0}{b}_{\alpha s} v_{is} + \overset{0}{b}_{is} v_{\alpha s} \right) \right)_{,\alpha} + \end{aligned}$$

$$+ \overset{0}{X}_i = \rho \frac{\partial^2 h v_{i0}}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.1.23)$$

2.2 N – ური მიახლოება

თუ დავუშვებთ, რომ N -ზე მეტი მომენტები ნულის ტოლია და განვიხილავთ პირველ $N + 1$ განტოლებას ($r = \overline{0, N}$), თითოეული $i = 1, 2, 3$ -სთვის უსასრულო სისტემიდან მივიღებთ N რიგის მიახლოებით (იერარქიულ) მოდელს u_{ir} ცვლადების მიმართ. შესაბამისად, კონსტიტუციური სისტემა შეიცავს $3N + 3$ განტოლებას $3N + 3$ უცნობი ფუნქციით (u_{ir}), $r = \overline{0, N}$

(სხვა სიტყვებით, რომ თქვამთ u_{ir} არის "მიახლოებითი მნიშვნელობა" u_{ir} -ის. რადგან u_{ir} არის სასრული სისტემის ამონახსნი. ჩანაწერის გადატვირთვის თავიდან ასაცილებლად ზედა ინდექსს N აღარ დავწერთ).

$$\begin{aligned} & \left(a_1 u_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r}^N b_{ks}^r u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{s=r}^N \left(b_0^r b_{\alpha s}^r u_{is} + b_0^r b_{is}^r u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} \\ & + \sum_{s=0}^r a_{js}^r \left[\left(a_1 u_{\gamma s, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s}^N b_{ks'}^s u_{ks'} \right) \delta_{ji} + \frac{1}{2} b_0 (u_{js, i} + u_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s}^N \left(b_{js'}^s u_{is'} + b_{is'}^s u_{js'} \right) \right] \quad (2.2.1) \\ & + \overset{r}{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=0}^N b_{ks}^0 u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha})_{,\alpha} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{s=0}^N \left(b_0^0 b_{\alpha s}^0 u_{is} + b_0^0 b_{is}^0 u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} + \overset{0}{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

ერთგვაროვნობის შემთხვევა:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 u_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r}^N b_{ks}^r u_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha r, i} + u_{ir, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s=r}^N \left(b_{\alpha s}^r u_{is} + b_{is}^r u_{\alpha s} \right)_{,\alpha} + \\ & \sum_{s=0}^r a_{js}^r \left[\left(a_1 u_{\gamma s, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s}^N b_{ks'}^s u_{ks'} \right) \delta_{ji} + \frac{1}{2} b_0 (u_{js, i} + u_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s}^N \left(b_{js'}^s u_{is'} + b_{is'}^s u_{js'} \right) \right] + \quad (2.2.3) \\ & \overset{r}{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3}, r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\left(2a_0h + a_1u_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=0}^N b_{ks}^0 u_{ks} \right)_{, \alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha})_{, \alpha} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^N \left(b_0^0 b_{\alpha s}^0 u_{is} + b_0^0 b_{is}^0 u_{\alpha s} \right)_{, \alpha} + X_i^0 = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.2.4)$$

N მიახლოებაში (იერარქიული მოდელი)

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \cong \sum_{r=0}^N a \left(r + \frac{1}{2} \right) u_{ir}^N(x_1, x_2, t) P_r(ax_3 - b)$$

შევნიშნოთ, რომ u_{ir}^N ზედა სისტემის ამონახსი (N რიგის მიახლოება) არ არის r რიგის მომენტი (2.1.2)-ის აზრით. უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ პრიზმული გარსის საზღვარზე კონსტიტუციური N რიგის მიახლოების მისაღებად ვიყენებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$X_{ni}^{(\pm)} = X_{ji}^{(\pm)} n_j, \quad i = \overline{1, 3};$$

N რიგის მიახლოებაში პრიზმული გარსის გვედითი სასაზღვრო (1.1.4) პირობები და საწყისი (1.1.5) პირობები უნდა ჩაიწეროს ფუნქციების r რიგის მომენტების ტერმინებში, რომელიც მიიღება $P_r(ax_3 - b)$ პოლინომზე გამრავლებით და $h^{(-)}(x_1, x_2)$ -დან $h^{(+)}(x_1, x_2)$ -მდე ინტეგრებით x_3 ცვლადის მიმართ. იმის გათვალისწინებით, რომ კონსტიტუციური განტოლების კოეფიციენტები და სისქე $\bar{\omega}$ -ზე არ გვარდება.

$$u_{ir} = f_{ir} \quad \gamma_0, \quad X_{jir} n_j = g_{ir} \quad \gamma_1 = \partial \omega \setminus \gamma_0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.2.5)$$

და კოშის პირობები:

$$u_r(x, 0) = u_r^0(x), \quad \dot{u}_r(x, 0) = u_r^1(x) \quad x \in \Omega$$

$\vec{n} := (n_1, n_2)$ არის $\partial \omega$ გარე ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორი. (f_1, f_2, f_3) და (g_1, g_2, g_3) არის მოცემული გადაადგილების და ძაბვის ვექტორი, ხოლო u_r^0 და u_r^1 არის საწყისი გადაადგილების და სიჩქარის ვექტორების r რიგის მომენტი. γ_0 არის $x_3 = 0$ ზედაპირზე პროექციის საზღვარი. პრიზმული გარსის გვერდითი საზღვრის შესაბამისი ნაწილები (2.2.5) საზოგადოდ ერთმანეთისგან განსხვავებულია, ფიზიკური ამოცანების მიხედვით ზოგიერთი შეიძლება ცარიელი იყოს. მაგალითად წამახვილებული პრიზმული გარსისთვის სასაზღვრო პირობები საზოგადოდ არ არის კლასიკური და დამოკიდებულია წამახვილების ხასიათზე : შესაძლოა დირიხლეს ამოცანა შეიცვალოს კელდიშის ამოცანით ან შერეული სასაზღვრო პირობის ამოცანით, სადაც $\partial \omega$ -ზე დადებითი სისქე აქვს (არ გვარდება) სასაზღვრო პირობას აქვს (2.2.5) სახე.

მსგავსად, ვიღებთ კონსტიტუციურ სისტემას $3N + 3$ განტოლებით $3N + 3$ უცნობი ფუნქციით (v_{ir}), $i = 1, 2, 3$ $r = \overline{0, N}$ (ჩანაწერის გადატვირთვის თავიდან ასაცილებლად ზედა ინდექს N აღარ დავწერთ).
დავუშვათ,

$$v_{ir} = 0, \quad \text{როცა } r > N,$$

მაშინ

$$\begin{aligned} & \left(a_1 h^{2r+1} v_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s=r+1}^N h^{r+s+1} {}^r b_{ks} v_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \\ & + \frac{1}{2} (b_0 h^{2r+1} (v_{\alpha r, i} + v_{ir, \alpha}))_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(b_0 \sum_{s=r+1}^N h^{2r+1} ({}^r b_{\alpha s} v_{is} + {}^r b_{is} v_{\alpha s}) \right)_{,\alpha} + \\ & + \sum_{s=0}^{r-1} a_{js}^r \left[\left(a_1 h^{r+s+1} v_{\gamma r, \gamma} + a_1 \sum_{s'=s+1}^N h^{r+s'+1} {}^s b_{ks'} v_{ks'} \right) \delta_{ji} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_0 h^{r+s+1} (v_{js, i} + v_{is, j}) + \frac{1}{2} b_0 \sum_{s'=s+1}^N h^{r+s'+1} ({}^s b_{js'} v_{is'} + {}^s b_{is'} v_{js'}) \right] \\ & + h^r X_i = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{ir}}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad r = 1, 2 \dots \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 h v_{\gamma 0, \gamma} + a_1 \sum_{s=1}^N h^{s+1} {}^0 b_{ks} v_{ks} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \\ & + \frac{1}{2} (b_0 h (v_{\alpha 0, i} + v_{i0, \alpha}))_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(b_0 \sum_{s=1}^N h \left({}^0 b_{\alpha s} v_{is} + {}^0 b_{is} v_{\alpha s} \right) \right)_{,\alpha} + \\ & + X_i = \rho \frac{\partial^2 h v_{i0}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

N რიგის მიახლოებაში (იერარქიული მოდელი):

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) \cong \sum_{r=0}^N a \left(r + \frac{1}{2} \right) v_{ir}^N(x_1, x_2, t) P_r(ax_3 - b)$$

სადაც v_{ir}^N არის (2.1.21) სისტემის ამონახსნი.

ამასთან

$$e_{ijr} = \frac{1}{2} h^{r+1} (v_{ir,j} + v_{jr,i}) + \frac{1}{2} \sum_{s=r+1}^N h^{s+1} (b_{is}^r v_{js} + b_{js}^r v_{is}), \quad i, j = \overline{1,3}, r = \overline{0,N}$$

$$X_{n_jr} = X_{ijr} n_i \quad j = \overline{1,3}, \quad r = \overline{0,N}$$

(2.2.5) სასაზღვრო პირობები და კოშის საწყისი პირობა მარტივად გადაიწერება v_{ir} -ის ტერმინებში, იმ პირობით, რომ პრიზმული გარსი არ არის წამახვილებული

$$v_{ir} = h^{-r-1} f_{ir} \quad \gamma_0, \quad X_{jir} n_j = g_{ir} \quad \gamma_1 = \partial \omega \setminus \overline{\gamma_0}, \quad i = \overline{1,3} \quad (2.2.8)$$

2.3 $N=0$ მიახლოება

განვიხილოთ (2.2.1),(2.2.2) $N = 0$ მიახლოებისთვის და მივიღოთ ძირითადი განტოლებები გადაადგილების მომენტებში

$$\begin{aligned} \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma_0, \gamma} + a_1 \overset{0}{b_{k0}} u_{k0} \right)_{,\alpha} \delta_{\alpha i} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, i} + u_{i0, \alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(b_0 \overset{0}{b_{\alpha 0}} u_{i0} + b_0 \overset{0}{b_{i0}} u_{\alpha 0} \right)_{,\alpha} \\ + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} \quad i = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

გადავწეროთ სისტემა $i = 1, 2$ და $i = 3$ შემთხვევებისთვის და გავითვალისწინოთ,

$$\overset{0}{b_{j0}} = 0, \quad \overset{0}{b_{30}} = 0, \quad \overset{0}{b_{\alpha 0}} = \overset{0}{a_{\alpha 0}} - 2 \frac{h_{,\alpha}}{h} = -2 \frac{h_{,\alpha}}{h}, \quad \alpha = 1, 2$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma_0, \gamma} - 2a_1 \frac{h_{,1}}{h} u_{10} - 2a_1 \frac{h_{,2}}{h} u_{20} \right)_{,\beta} + \frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha})_{,\alpha} - \\ \left(b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{\beta 0} + b_0 \frac{h_{,\beta}}{h} u_{\alpha 0} \right)_{,\alpha} + X_\beta = \rho \frac{\partial^2 u_{\beta 0}}{\partial t^2} \quad \beta = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\frac{1}{2} b_{0,\alpha} (u_{\alpha 0, 3} + u_{30, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, 3} + u_{30, \alpha})_{,\alpha} - \left(b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{30} \right)_{,\alpha} + X_3 = \rho \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} \quad (2.3.3)$$

ასევე, შევნიშნოთ, რომ

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \cong a \left(0 + \frac{1}{2}\right) u_{i0}^0(x_1, x_2, t) P_0(ax_3 - b) = \frac{1}{2h} u_{i0}^0 = \frac{1}{2} v_{i0}^0.$$

v_{i0} -ისთვის აქვს

$$(2a_0h + a_1hv_{\gamma 0, \gamma})_{, \beta} + \frac{1}{2} (b_0h(v_{\alpha 0, \beta} + v_{\beta 0, \alpha}))_{, \alpha} + X_{\beta}^0 = \rho \frac{\partial^2 hv_{\beta 0}}{\partial t^2} \quad \beta = 1, 2 \quad (2.3.4)$$

$$\frac{1}{2} (b_0h(v_{\alpha 0, 3} + v_{30, \alpha}))_{, \alpha} + X_3^0 = \rho \frac{\partial^2 hv_{30}}{\partial t^2} \quad (2.3.5)$$

სახე.

2.4 N=1 მიახლოება

ანალოგიურად, ჩავწეროთ სისტემა $N = 1$ მიახლოებაში, თუ გავითვალისწინოთ [თავი 1],[S3](მათემატიკური მომენტები)-დან კოეფიციენტების განსაზღვრებებს, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 u_{\gamma 1, \gamma} - 2a_1 \frac{h_{,1}}{h} u_{11} - 2a_1 \frac{h_{,2}}{h} u_{21} \right)_{, \beta} + \frac{1}{2} b_{0, \alpha} (u_{\alpha 1, \beta} + u_{\beta 1, \alpha}) + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 1, \beta} + u_{\beta 1, \alpha})_{, \alpha} - \left(b_0 \frac{h_{, \alpha}}{h} u_{\beta 1} + b_0 \frac{h_{, \beta}}{h} u_{\alpha 1} \right)_{, \alpha} \\ & + \frac{\tilde{h}_{, \alpha}}{h} \left[\left(a_1 u_{\gamma 0, \gamma} - 2a_1 \frac{h_{,1}}{h} (u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22}) \right) \delta_{\alpha \beta} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 0, \beta} + u_{\beta 0, \alpha}) - b_0 \left(\frac{h_{, \alpha}}{h} u_{\beta 0} + \frac{h_{, \beta}}{h} u_{\alpha 0} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} b_0 \left(\frac{\tilde{h}_{, \alpha}}{h} u_{\beta 1} + \frac{\tilde{h}_{, \beta}}{h} u_{\alpha 1} \right) \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} b_0 (u_{30, \beta} + u_{\beta 0, 3}) - b_0 \frac{h_{, \beta}}{h} u_{30} + \frac{3}{2} b_0 \left(\frac{1}{h} u_{\beta 3} - \frac{\tilde{h}_{, \beta}}{h} u_{31} \right) \right] \\ & \frac{h_{, \alpha}}{h} \left[\left(a_1 u_{\gamma 1, \gamma} - 2a_1 \frac{h_{,1}}{h} u_{11} - 2a_1 \frac{h_{,2}}{h} u_{21} \right) \delta_{\alpha \beta} + \frac{1}{2} b_0 (u_{\alpha 1, \beta} + u_{\beta 1, \alpha}) - b_0 \left(\frac{h_{, \alpha}}{h} u_{\beta 1} + \frac{h_{, \beta}}{h} u_{\alpha 1} \right) \right] \\ & + X_{\beta}^1 = \rho \frac{\partial^2 u_{\beta 1}}{\partial t^2} \quad \beta = 1, 2, \quad r = 1 \quad (2.4.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}b_{0,\alpha}(u_{\alpha 1,3} + u_{31,\alpha}) + \frac{1}{2}b_0(u_{\alpha 1,3} + u_{31,\alpha})_{,\alpha} - \left(b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{31}\right)_{,\alpha} - \\
& \frac{1}{h} \left(a_1 u_{\gamma 0,\gamma} - 2a_1 \frac{h_{,1}}{h} (u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{22})\right) - b_0 \frac{1}{h} u_{30,3} + \frac{1}{2}b_0 \frac{\tilde{h}_{,\alpha}}{h} (u_{\alpha 0,3} + u_{30,\alpha}) - \\
& b_0 \frac{3}{h^2} u_{31} + b_0 \frac{\tilde{h}_{,\alpha}}{2h} \left(-2 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{30} + 3 \frac{\tilde{h}_{,\alpha}}{h} u_{31} - \frac{3}{h} u_{\alpha 1}\right) +
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$$\frac{h_{,\alpha}}{h} \left(\frac{1}{2}b_0(u_{\alpha 1,3} + u_{31,\alpha}) - b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{31}\right) + X_{3=}^1 \rho \frac{\partial^2 u_{31}}{\partial t^2} \quad i = 3, \quad r = 1$$

$$\begin{aligned}
& \left(2a_0 h + a_1 u_{\gamma 0,\gamma} - 2a_1 \frac{h_{,\gamma}}{h} u_{\gamma 0} + 3 \frac{\tilde{h}_{,\gamma}}{h} u_{\gamma 1}\right)_{,\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b_{0,\alpha}(u_{\alpha 0,\beta} + u_{\beta 0,\alpha}) + \frac{1}{2}b_0(u_{\alpha 0,\beta} + u_{\beta 0,\alpha})_{,\alpha} - \\
& \left(b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{\beta 0} + b_0 \frac{h_{,\beta}}{h} u_{\alpha 0}\right)_{,\alpha} + \frac{3}{2} \left(b_0 \frac{\tilde{h}_{,\alpha}}{h} u_{\beta 1} + b_0 \frac{\tilde{h}_{,\beta}}{h} u_{\alpha 1}\right)_{,\alpha} + X_{\beta=}^0 \rho \frac{\partial^2 u_{\beta 0}}{\partial t^2} \quad \beta = 1, 2, \quad r = 0
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}b_{0,\alpha}(u_{\alpha 0,3} + u_{30,\alpha}) + \frac{1}{2}b_0(u_{\alpha 0,3} + u_{30,\alpha})_{,\alpha} + \frac{1}{2} \left(3b_0 \frac{\tilde{h}_{,\alpha}}{h} u_{31} + b_0 \frac{3}{h} u_{\alpha 1} - 2b_0 \frac{h_{,\alpha}}{h} u_{30}\right)_{,\alpha} + \\
& X_{3=}^0 \rho \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2} \quad i = 3, \quad r = 0
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

სოლო v_{i0} - სთვის გვექნება

$$\begin{aligned}
& (a_1 h^3 v_{\gamma 1,\gamma})_{,\beta} + \frac{1}{2} (b_0 h^3 (v_{\alpha 1,\beta} + v_{\beta 1,\alpha}))_{,\alpha} + \\
& + \tilde{h}_{,\alpha} \left[\left(a_1 h v_{\gamma 1,\gamma} - 3a_1 h (\tilde{h}_{,\gamma} v_{\gamma 1} - v_{31}) \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} b_0 h (v_{\alpha 0,\beta} + v_{\beta 0,\alpha}) - \frac{3}{2} b_0 (\tilde{h}_{,\alpha} v_{\beta 1} + \tilde{h}_{,\beta} v_{\alpha 1}) \right] \\
& - \left[\frac{1}{2} b_0 h (v_{30,\beta} + v_{\beta 0,3}) + \frac{3}{2} b_0 (v_{\beta 1} - \tilde{h}_{,\beta} v_{31}) \right] + h X_{\beta=}^1 \rho h \frac{\partial^2 h^2 v_{\beta 1}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2, \quad r = 1 \tag{2.4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (b_0 h^3 (v_{\alpha 1,3} + v_{31,\alpha}))_{,\alpha} + \tilde{h}_{,\alpha} \left[\frac{1}{2} b_0 h (v_{\alpha 0,3} + v_{30,\alpha}) - \frac{3}{2} b_0 (\tilde{h}_{,\alpha} v_{31} - v_{\alpha 1}) \right] \\ & - \left[(a_1 h v_{\gamma 1,\gamma} - 3a_1 h (\tilde{h}_{,\gamma} v_{\gamma 1} - v_{31})) + b_0 h v_{30,3} + 3b_0 v_{31} \right] + h X_3 = \rho h \frac{\partial^2 h^2 v_{31}}{\partial t^2}, \quad i = 3, \quad r = 1 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} & \left(2a_0 h + a_1 h v_{\gamma 0,\gamma} - 3a_1 h (\tilde{h}_{,\gamma} v_{\gamma 1} - v_{31}) \right)_{,\beta} + \frac{1}{2} (b_0 h (v_{\alpha 0,\beta} + v_{\beta 0,\alpha}))_{,\alpha} \\ & - \frac{3}{2} \left(b_0 (\tilde{h}_{,\alpha} v_{\beta 1} + \tilde{h}_{,\beta} v_{\alpha 1}) \right)_{,\alpha} + X_{\beta} = \rho \frac{\partial^2 h v_{\beta 0}}{\partial t^2} \quad \beta = 1, 2 \quad r = 0 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\frac{1}{2} (b_0 h (v_{\alpha 0,3} + v_{30,\alpha}))_{,\alpha} - \frac{3}{2} \left(b_0 (\tilde{h}_{,\alpha} v_{31} - v_{\alpha 1}) \right)_{,\alpha} + X_3 = \rho \frac{\partial^2 h v_{30}}{\partial t^2} \quad i = 3, \quad r = 0 \quad (2.4.8)$$

სისტემა.

2.5 რაინერის დრეკადი პრიზმული გარსები ხარისხოვანი წამახვილებით

თუ მასალა ერთგვაროვანია, ესე იგი $a_0, a_1, b_0 = const$ და განვიხილავთ სტაციონალურ პროცესს. ე.ი პროცესი დროზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ ,თუ სიმარტივისათვის დავუშვებთ რომ მოცულობითი ძალები უგულებელყოფილია და პირის ზედაპირებზე მოქმედი ზედაპირული ძალები ნულია ე.ი. $X_i = 0$, (2.3.4),(2.3.5) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(2a_0 h + a_1 h v_{\gamma 0,\gamma})_{,\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} b_0 (h v_{\alpha 0,\beta} + h v_{\beta 0,\alpha})_{,\alpha} = 0 \quad \beta = 1, 2 \quad (2.5.1)$$

$$\frac{1}{2} b_0 (h v_{\alpha 0,3} + h v_{30,\alpha})_{,\alpha} = 0 \quad (2.5.2)$$

სასაზღვრო პირობები წამახვილებული გარსების გადაადგილებების შეწონილი მომენტებისთვის არის არაკლასიკური. სახელდობრ, ჩვენ ყოველთვის არ შეგვიძლია საძიებელი მომენტების, ამდენად გადაადგილების დასახელება წამახვილებულ საზღვარზე.

ვიხილავთ ω არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია საკმარისად გლუვი რკალით $(\partial \omega \setminus \bar{\gamma}^0)$, რომელიც მოთავსებულია $x_2 > 0$ ნახევარსიბრტყეში და x_1 -ღერძის $(x_2 = 0)$ $\bar{\gamma}^0$ სეგმენტით . სისქე იცვლება როგორც ხარისხოვანი

$$2h(x_1, x_2) = 2h_0 x_2^\kappa, \quad h_0, \kappa = \text{const} > 0, \quad (2.5.3)$$

ფუნქცია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა

$$v_{\alpha 0} \equiv 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad v_{30} \neq 0$$

(2.5.3), (2.5.2)-დან ვიღებთ

$$x_2 v_{30, \alpha \alpha} + \kappa v_{30, 2} = 0 \quad (2.5.4)$$

დირიხლეს(Dirichlet) ამოცანა: ვიპოვოთ (2.5.4)- ის ამონახსნი

$$v_{30} \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega})$$

$\partial\omega$ -ზე მათი ცნობილი მნიშვნელობებით და

კელდიშის(Keldysh) ამოცანა: ვიპოვოთ (2.5.4)- ის შემოსაზღვრული ამონახსნი

$$v_{30} \in C^2(\omega) \cap C\left(\omega \cup \left(\partial\omega \setminus \bar{\gamma}^0\right)\right)$$

$\partial\omega \setminus \bar{\gamma}^0$ -ს რგალზე მათი ცნობილი მნიშვნელობებით.

თეორემა (გ.ჯაიანი, იხ. [29]). თუ განტოლების

$$x_2^{\kappa_\alpha} u_{, \alpha \alpha} + a_\alpha(x_1, x_2) u_{, \alpha} + c(x_1, x_2) u = 0, \quad c \leq 0, \quad \kappa_\alpha = \text{const} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

კოეფიციენტები $a_\alpha, \alpha = 1, 2$, და c , არის ანალიზური $\bar{\omega}$ - ში, მაშინ, თუ

(i) ან $\kappa_2 < 1$,

ან $\kappa_2 \geq 1$ და

$$a_2(x_1, x_2) < x_2^{\kappa_2 - 1} \quad (2.5.5)$$

$\bar{\omega}_\delta$ - ში რაიმე $\delta = const > 0$, სადაც

$$\omega_\delta := \{(x_1, x_2) \in \omega : 0 < x_2 < \delta\} \quad (2.5.6)$$

დირიხლეს(Dirichlet) ამოცანა ($u \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega})$) ცალსახად ამოხსნადია, ხოლო კელდიშის ამოცანას აქვს უამრავი ამონახსნი.

(ii) თუ $\kappa_2 \geq 1$ და

$$a_2(x_1, x_2) \geq x_2^{\kappa_2 - 1}$$

ω_δ - ში,
ამასთან

$$a_1(x_1, x_2) = O(x_2^{\kappa_1}), x_2 \rightarrow 0_+ \quad (2.5.7)$$

(O არის ლანდაუს სიმბოლო),

კელდიშის(Keldysh) ამოცანა (შემოსაზღვრულ $u \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega} \setminus \gamma^0)$) ცალსახად ამოხსნადია, ხოლო დირიხლეს ამოცანა ამოხსნადი არ არის.

ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გადაადგილებები შეგვიძლია დავასახელოთ წამახვილებულ $\bar{\gamma}^0$ ნაპირზე, თუ $\kappa < 1$ (ე.ი ნაპირი ბლაგვად არის წამახვილებული), ხოლო როცა $\kappa \geq 1$

(ე.ი ნაპირი მახვილად არის წამახვილებული) ვერ დავასახელებთ და საერთოდ უნდა გათავისუფლდეს $\bar{\gamma}^0$ -ზე სასაზღვრო პირობისგან.

მართლაც, (2.5.4) განტოლებისთვის თეორემაში უნდა ავიღოთ $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1, a_1 = 0, a_2 = \kappa, c = 0$, მაშინ (2.5.5) პირობა მიიღებს

$$\kappa < 1, \quad \bar{\omega}_\delta, \text{-ში.}$$

სახეს.

შესაბამისად, როცა $\kappa \geq 1$ ისმება კელდიშის ამოცანა, სადაც ამოხსნადობის პირობა სრულდება.

განვიხილოთ

$$b_0 = \tilde{b}x_2^{\tilde{\kappa}} \quad \tilde{b} > 0, \tilde{\kappa} \geq 0 \quad \text{და} \quad h = h_0x_2^{\kappa},$$

თუ უგულებელვყოფთ მოცულობით ძალებს და ზედაპირულ ძალებს ავიღებთ ნულის ტოლად, (2.3.5)-დან

$$(x_2^{\kappa+\tilde{\kappa}}v_{30,\alpha})_{,\alpha} = 0, \quad (2.5.8)$$

ანალოგიურად დავასკვნით, რომ $(\kappa + \tilde{\kappa}) < 1$ კორექტულია დირიხლეს ამოცანა, ხოლო, როცა $(\kappa + \tilde{\kappa}) \geq 1$ კორექტულია კელდიშის ამოცანა.

თუ $\tilde{\kappa} = 0$, პრიზმული გარსი არის მუდმივი სისქის.

3 დასკვნა

განზომილების რედუქციის ილია ვეკუას მეთოდის გამოყენებით, აგებულია იერარქიული მოდელები რაინერის დრეკადი მასალის სხეულებისთვის, გარკვეული აზრით გაწრფივებულ კონსტიტუციურ დამოკიდებულებების შემთხვევაში. აგებულია N -ური მიახლოება, როგორც გადაადგილების მომენტების u_{ir} კომპონენტებში, ასევე შეწონილი გადაადგილებების v_{ir} ტერმინებში. მოყვანილია $N = 0$ და $N = 1$ მიახლოებაში მმართველი განტოლებების სახე. $N = 0$ მიახლოებაში განხილულია დირიხლეს და კელდიშის ამოცანები რაინერის დრეკადი პრიზმული გარსების ხარისხოვანი წამახვილების შემთხვევაში. ხარისხის მაჩვენებლის მნიშვნელობებიდან გამომდინარე დადგენილია სასაზღვრო პირობების დასმის თავისებურებები. სასაზღვრო პირობების დასმის თავისებურებების თაობაზე მიღებული მათემატიკური შედეგის(დასკვნის) მექანიკის(ფიზიკური) თვალსაზრისით ინტერპრეტაცია მდგომარეობს შემდეგში: გადაადგილებებში სასაზღვრო ამოცანის განხილვისას ბლაგვად წამახვილებულ ნაპირზე გადაადგილების დასახელება, სხვა სიტყვებით, ნაპირის ჩამაგრება შესაძლებელია, ხოლო მახვილად წამახვილებულ ნაპირზე გადაადგილების დასახელება შეუძლებელია, დაუშვებელია. ანალოგიური სიტუაცია გვაქვს თუ ვინილავთ მუდმივი სისქის სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს(ე.ი ფირფიტას), როცა კონსტიტუციური კოეფიციენტი იცვლება, როგორც ხარისხოვანი ფუნქცია(ე.ი მასალა(სხეული) არაერთგვაროვანია) და ნული ხდება ნაპირზე, ამ შემთხვევაში ბლაგვი წამახვილების სიტუაცია გვაქვს, როცა ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე ნაკლებია, ხოლო მახვილი წამახვილების სიტუაცია გვაქვს როცა ხარისხის მაჩვენებელი 1-ზე მეტია ან 1-ის ტოლია.

4 ციტირებული ლიტერატურა

- [1] ი.ვეკუა (I.N. Vekua). On a way of calculating of prismatic shells. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21:191-259, 1955 (Russian).
- [2] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), Elastic bodies with non-smooth boundaries – cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl. 2 (1996), 117-120
- [3] გ.ჯაიანი (G. Jaiani) Solution of some problems for a degenerate elliptic equation and their application to prismatic shells, 1982
- [4] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), ს.ხარიბეგაშვილი (Kharibegashvili S.), დ.ნატროშვილი (Natroshvili D.), Wendland W., Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77, 2 (2004), 95-122
- [5] ი.ვეკუა (I.N. Vekua)., The theory of thin shallow shells of variable thickness. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30 (1965), 5-103 (Russian)
- [6] ი.ვეკუა (I.N. Vekua). Shell Theory: General Methods of Construction. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London, Melbourne, 1985.
- [7] გ.ავალიშვილი (Avalishvili G.), Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for elastic rods with variable cross-sections. Bull. Georgian. Acad. Sci. 174 (3), 399–402, 2006
- [8] გ.ავალიშვილი (Avalishvili G.), მ.ავალიშვილი (Avalishvili M.), On a hierarchical model of elastic rods with variable cross- sections. Appl. Math. Inform. Mech. 9 (1), 1–16, 2004
- [9] გ.ავალიშვილი (Avalishvili G.), Avalishvili M., On the investigation of one-dimensional models for thermoelastic beams. Bull. Georgian Acad. 3 (3), 25–32, 2009
- [10] მ.ავალიშვილი (Avalishvili M.), დ.გორდეზიანი (Gordeziani D.), Investigation of a hierarchical model of prismatic shells, Bull. Georgian Acad. Sci., 165, 3, 485-488, 2001
- [11] მ.ავალიშვილი (Avalishvili M.), დ.გორდეზიანი (Gordeziani D.), Investigation of two-dimensional models of elastic prismatic shells, Georgian Mathematical Journal, 10, 1 (2003), 17-36
- [12] ნ.ჩინჩალაძე (Chinchaladze N.), გილბერტი (Gilbert R.P.), გ.ჯაიანი (Jaiani G.), ს.ხარიბეგაშვილი (Kharibegashvili S.), დ.ნატროშვილი (Natroshvili D.), Existence and uniqueness theorems for cusped prismatic shells in the N-th hierarchical model, Mathematical Methods in Applied Sciences, 31, 11 (2008) 1345-1367, DOI 10.1002 /mma.975, for the electronic version see: <http://www3.interscience.wiley.com/>
- [13] დ.გორდეზიანი (Gordeziani D.), On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells, Dokl.Akad. Nauk SSSR 215, 6 (1974), 1289-1292
- [14] დ.გორდეზიანი (Gordeziani D.), To the accuracy of one variant of the theory of thin shells, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 215, 4 (1974), 751-754

- [15] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), Application of Vekua's dimension reduction method to cusped plates and bars, Bull. TICMI, 5 (2001), 27-34
- [16] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), Cusped Shell-like Structures Springer, Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011
- [17] 9. Chinchaladze N., Gilbert R. P., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Cusped Elastic Beams under the Action of Stresses and Concentrated Forces. Applicable Analysis, 89 (5), 757–774, 2010, access: <http://www.tandf.co.uk/journals>
- [18] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), On a mathematical model of bars with variable rectangular Cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81, 3 (2001), 147-173
- [19] ს.მიხლინი (Mikhlin S.G.), Variational Methods in Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1970 (Russian)
- [20] თ.მეუნარგია (Meunargia T.), On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells, Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, 119 (1999), 133-154
- [21] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), ს.ხარიბეგაშვილი (Kharibegashvili S.), დ.ნატროშვილი (Natroshvili D.), ვენდლანდო (Wendland W.L.), Hierarchical Models for Elastic Cusped Plates and Beams, Lecture Notes of TICMI, 4, 2003
- [22] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), ნ.ჩინჩალაძე (Chinchaladze N.), Cylindrical Bending of a Cusped Plate with Big Deflections, Journal of Mathematical Sciences, Springer, 157, 1 (2009), 52-69
- [23] ნ.ჩინჩალაძე (Chinchaladze N.), გ.ჯაიანი (Jaiani G.), მ.მაისტრენკო (Maistrenko B.), პოდო-გუიდუგლი (Podio-Guidugli P.), Concentrated contact interactions in cuspidate prismatic shell-like bodies, Archive of Applied Mechanics, 81,10 (2011) , 1487-1505
- [24] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), ნ.ჩინჩალაძე (Chinchaladze N.), A survey of results on cusped standard and prismatic shells, in particular plates, and bars and on the corresponding singular PDEs. Continuum Mech. Thermodyn.(2021)
- [25] ქ.ტრუსდელი (C. Truesdell), A First Course in Rational Continuum Mechanics, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD(Moryland) (1972)
- [26] გ.ჯაიანი, უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, პირველი გამოცემა 2004, მეორე გამოცემა 2018
- [27] გ.ჯაიანი (G. Jaiani), Piezoelectric viscoelastic kelvin-voigt cusped prismatic shells, Lecture Notes of TICMI, VOL 19, TBILISI 2018
- [28] ი.ვეკუა (I.N. Vekua)., Some general methods for constructing various versions of the theory of shells, Moscow, 1982

[29] გ.ჯაიანი (G. Jaiani). On a generalization of the Keldysh theorem. Georgian Mathematical Journal, 2(3):291-297, 1995.

5 აღნიშვნების ნუსხა

1. თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში ორჯერ გვხვდება, ვგულისხმობთ, რომ ზდება აჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე(ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობას 1,2,3, ხოლო ბერძნული კი 1,2);
2. მძიმის შემდეგ ინდექსი მიუთითებს კერძო წარმოებულზე შესაბამისი ცვლადით(დეკარტის $Ox_1x_2x_3$ სისტემაში).

2. \mathbb{R} – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

3. \mathbb{R}^3 – ევკლიდის სამგანზომილებიანი ვექტორული ველი, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, სადაც $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3}$

4. \mathbb{R}^2 – ევკლიდის ორგანზომილებიანი ვექტორული ველი, $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, სადაც $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$

5. δ_{ij} - კრონეკერის სიმბოლო

6. X_{ij} - ძაბვის ტენზორის კომპონენტები

7. e_{ij} - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები

8. ϕ_i - მოცულობითი ძალის კომპონენტები

9. u_i - გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები

10. ρ - სიმკვრივე

11. $C^n(\Omega)$ - Ω არეზე n -ჯერ უწყვეტად წარმოებულთა ფუნქციათა კლასი

12. θ_i - დეფორმაციის ტენზორის მთავარი ინვარიანტები

13. $h(x_1, x_2)$ - იხ. გვ.7

14. $\tilde{h}(x_1, x_2)$ - იხ. გვ.7

15. $f_\tau(x_1, x_2)$ - იხ. გვ.9

16. $P_r(\tau)$ - ლეჟანდრის პოლინომი

17. \tilde{X}_j - იხ. გვ.17