ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების შეჯამებადობის ზოგიერთი საკითხი

გოგი კეჟერაძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: ასოც. პროფესორი თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი 2023

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა. მასში მიღებულია დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების (C,α) $(0 < \alpha < 1)$ საშუალოების, მოცემულ სეგმენტზე თანაბრად კრებადობისთვის საკმარისი პირობები, რაც წარმოადგენს ტაბერსკის მიერ $(C,1)$ საშუალოებისთვის ჩამოყალიბებული თეორემების განზოგადებებს (C,α) საშუალოებზე.

1 შესავალი

ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების საშუალოების კრებადობასთან დაკავშირებით არსებული შედეგების გაუმჯობესება. როგორც ცნობილია, 1973 წელს პოლონელმა მათემატიკოსმა რომან ტაბერსკიმ [1] (იხ., აგრეთვე, [2]) გამოაქვეყნა ნაშრომი ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული ჯამების კრებადობასთან დაკავშირებით, რომელშიც დამტკიცებულია თეორემა დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების $(C, 1)$ საშუალოების თანაბრად კრებადობასთან დაკავშირებით. (C, α) $(0 < \alpha < 1)$ საშუალოებთან დაკავშირებით მსგავსი თეორემის მართებულობა აქამდე არ გამოკვლეულა. ჩვენს მიზანს სწორედ ეს საკითხი წარმოადგენდა. კერძოდ, ნაშრომში ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია თეორემები, რომლებშიც მოყვანილია დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების (C, α) საშუალოების თანაბრად კრებადობისათვის საკმარისი პირობები.

ნაშრომში მიღებულია (C, α) გულების წარმოდგენის ისეთი ფორმა, რომელიც საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენების საშუალებას იძლევა სასრულ ინტერვალზე ინტეგრებისას. რაც თავის მხრივ, შესაძლებელს ხდის ვიფიქროთ $(C, 1)$ საშუალოებთან დაკავშირებით უკვე არსებულული თეორემების (C, α) საშუალოებზე განზოგადებაზე.

2 ფურიეს მწკვრივების შეჯამებადობა

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ რიცხვითი მწკვრივების სხვადასხვა ტიპის საშუალოების კრებადობის განსაზღვრებას (იხ., მაგალითად, [3]). ასევე, მოვიყვანთ უკვე არსებულ თეორემებს და შედეგებს რიცხვითი მწკვრივის მოცემული საშუალოების ზოგად კრებადობებთან დაკავშირებით. განვიხილავთ წონების შეფასებებთან დაკავშირებულ ფორმულებს, რომლებიც დაგვეხმარება ძირითადი თეორემის დამტკიცებაში.

2.1 რიცხვითი მწკვრივების შეჯამებადობა

ჩვენ განვიხილავთ ნამდვილი რიცხვებისგან შემდგარ მატრიცას

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

ყოველ მიმდევრობას $s_0, s_1, s_2, \dots$ ჩვენ შევუსაბამებთ $\{\sigma_n\}$ რიცხვთა მიმდევრობას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\sigma_n = a_{n0}s_0 + a_{n1}s_1 + \dots + a_{n\nu}s_\nu + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

როცა ტოლობის მარჯვენა მწკვრივი კრებადია ყოველი n-თვის. თუ σ_n მიისწრაფვის s ზღვრისკენ, მაშინ ვიტყვით რომ $\{s_\nu\}$ მიმდევრობა , ან მწკვრივი რომლის კერძო ჯამი არის s_ν, M კრებადია (ჯამისკენ) s ზღვრისკენ. σ_n-ს ასევე, უწოდებენ $\{s_\nu\}$-ების წრფივ საშუალოებს (განსაზღვრულს M მატრიცით) . M მატრიცას რომლისთვისაც სრულდება $a_{n\nu} = 0$ ყოველი $n < \nu$-თვის, სამკუთხა მატრიცა ეწოდება.

ვთქვათ, რიცხვები

$$N_n = |a_{n0}| + |a_{n1}| + \dots, \quad A_n = a_{n0} + a_{n1} + \dots$$

არსებობს (და სასრულია) ყოველი n-თვის.

განსაზღვრება 1. მატრიცას ეწოდება რეგულარული თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:
(i) $\lim_{n\to+\infty} a_{n\nu} = 0$ ყოველი $\nu = 0, 1, \dots$;
(ii) N_n-ები შემოსაზღვრულია;
(iii) $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$.
ცხადია N_n-ების სასრულობიდან გამომდინარეობს A_n-ების არსებობა. ასევე, გამომდინარეობს

(1) მწკვრივის კრებადობა ყოველი შემოსაზღვრული (კერძოდ კრებადი) $\{s_v\}$ მიმდევრობის-თვის.

თეორემა 1. *თუ M რეგულარული მატრიცაა, და s_v მიისწრაფვის სასრული s ზღვრისკენ, მაშინ $\sigma_n \to s$.*

დამტკიცება.

ვთქვათ, $s_v = s + \epsilon_v$, $\epsilon_v \to 0$. შესაბამისად, $\sigma_n = \sigma_n' + \sigma_n''$, სადაც

$$\sigma_n' = sA_n, \quad \sigma_n'' = \epsilon_0 a_{n0} + \epsilon_1 a_{n1} + \ldots .$$

$\sigma_n' \to s$ (iii) პირობის გათვალისწინებით. ვთქვათ, N იყოს N_μ-ების ზედა საზღვარი, და $|\epsilon_\nu| < \eta/2N$ როცა $\nu > \nu_0$, სადაც η მოცემული დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\left|\sigma_n'\right| \leqslant (|\epsilon_0|\,|a_{n0}| + \ldots + |\epsilon_{\nu_0}|\,|a_{nv_0}|) + (|a_{n,v_0+1}| + |a_{n,v_0+s}| + \ldots)\,\eta/2N.$$

მარჯვენა მხარის პირველი ჯამი მიისწრაფვის 0-კენ როცა $n \to \infty$ (პირობა (i)), და შესაბამისად, ნაკლებია η-ზე, როცა $n > n_0$. ნაშთითი წევრი არ აღემატება $N\eta/2N = \frac{1}{2}\eta$-ს. აქედან, $|\sigma_n''| < \eta$ $n > n_0$-თვის. მაშასადამე, $\sigma_n'' \to 0, \sigma_n \to s$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა. ■

თეორემა 2. *ვთქვათ, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ და $q_0, q_1, q_2, \ldots$ არის ორი მიმდევრობა და*

$$P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n, \quad Q_n = q_0 + q_1 + \ldots + q_n, \quad q_n > 0 \text{ ყოველი } n\text{-თვის}, \quad Q_n \to \infty.$$

ამ პრიობების ქვეშ, თუ $p_n/q_n \to s$, მაშინ $P_n/Q_n \to s$.

თუ $s_v = p_v/q_\nu, \sigma_n = P_n/Q_n$, მაშინ

$$\sigma_n = (q_0 s_0 + q_1 s_1 + \ldots + q_n s_n)\,/Q_n$$

σ-ები არის s-ების წრფივი საშუალოები, და შეგვიძლია შევამოწმოთ რომ M მატრიცა დადებითი და რეგულარული მატრიცაა. ამისთვის კი საკმარისია გამოვიყენოთ შემდეგი ფაქტი, რომ თუ M რეგულარული მატრიცაა, მაშინ $\liminf s_\nu \leqslant \liminf \sigma_n \leqslant \limsup \sigma_n \leqslant \limsup s_\nu$.

კერძოდ, თუ ავიღებთ $q_\nu = 1$ ყოველი ν-თვის, ჩვენ მივიღებთ კოშის კლასიკურ შედეგს: თუ $s_v \to s$, მაშინ $(s_0 + s_1 + \ldots + s_n)\,/(n+1) \to s$.

განსაზღვრება 2. მოცემული მიმდევრობით $s_0, s_1, s_2, \ldots$ ყოველი $k = 0, 1, \ldots$-თვის, ჩვენ განვსაზღვრავთ მიმდევრობას $S_0^k, S_1^k, \cdots, S_s^k, \ldots$ შემდეგი ფორმულით

$$S_n^0 = s_n, \quad S_n^k = S_0^{k-1} + S_1^{k-1} + \ldots + S_n^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots).$$

განსაზღვრება 3. ანალოგიურად, $k = 0, 1, 2, \ldots$-თვის, ჩვენ განვსაზღვრავთ რიცხვების მიმდევრობას $A_0^k, A_1^k, A_2^k, \ldots$ შემდეგი ფორმულით

$$A_n^0 = 1, \quad A_n^k = A_0^{k-1} + A_1^{k-1} + \ldots + A_n^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots).$$

განსაზღვრება 4. ვიტყვით, რომ მიმდევრობა $s_0, s_1, s_2, \ldots$ (ან მწკრივი, რომლის კერძო ჯამი არის s_n) არის შეჯამებადი ჩეზაროს k-ური არითმეტიკული საშუალოს აზრით , ან შემოკლებით, (C, k) შეჯამებადი $()s$ ზღვრისკენ, თუ

$$\lim_{n \to \infty} S_n^k / A_n^k = s.$$

$(C, 0)$ კრებადობა არის ჩვეულებრივი კრებადობა. მიმდევრობის (C, k) კრებადობიდან გამომდინარეობს $(C, k+1)$ კრებადობა იგივე ზღვრისკენ (თეორემა 2-ში ავიღოთ $p_n = S_n^k, q_k = A_n^k$). იმისთვის, რომ ვიპოვოთ A_n^k-ს რიცხვითი მნიშვნელობები, ვიყენებთ შემდეგ წინადადებას: თუ

$$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

ყოველი n-თვის, და თუ $|x| < 1$, მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

როცა ერთ-ერთი მწკრივი კრებადია. თუ $\Sigma A_n x^n$ კრებადია და გადავამრავლებთ მარჯვენა მხარეს, და ერთნაირ წევრებს დავაჯგუფებთ, მივიღებთ მარცხენა მწკრივს. პირიქით, თუ $|x| < 1$ და $\Sigma a_n x^n$ კრებადია, მაშინ

$$(1 - x)^{-1} \sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} x^n \sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} A_n x^n$$

მწკრივების გადამრავლების კოშის წესის თანახმად, და მაშასადამე, $\Sigma A_n x^n$ კრებადია. კერძოდ, გვაქვს

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = (1 - x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-1} x^n = (1 - x)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-2} x^n = \ldots = (1 - x)^{-(k+1)}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1 - x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-1} x^n = (1 - x)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-2} x^n = \ldots = (1 - x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^0 x^n.$$

ეს საშუალებას გვაძლევს განსაზღვრება სხვაგვარად ჩამოვაყალიბოთ:

განსაზღვრება 5. მიმდევრობა $s_0, s_1, \ldots$ (ან მწკრივი $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ კერძო ჯამებით $s_0, s_1, s_2, \ldots$) (C, α) შეჯამებადია (ჯამი)s ზღვრისკენ, თუ

$$\sigma_n^\alpha = S_n^\alpha / A_n^\alpha \to s, \text{ როცა } n \to \infty,$$

სადაც S_n^α და A_n^α მოიცემა ფორმულებით

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1 - x)^{-\alpha-1}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n = (1 - x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1 - x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \end{array}\right\}.$$

ასევე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ $(C,\alpha)\lim s_n = s$, ან $(C,\alpha)\sum_0^\infty u_n = s$. ამ ახალ განსაზღვრებაში აღარ არის საჭირო α-ს მოვთხოვოთ არაუარყოფითობა. ერთადერთი შეზღუდვა არის ის, რომ $\alpha \neq -1,-2,-3,\ldots$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში, განსაზღვრების პირველი ფორმულიდან გამომდინარე A_n^α ნულია საკმარისად დიდი n-თვის). მაშასადამე, მხოლოდ $\alpha > -1$ შემთხვევა არის საინტერესო. რიცხვებს S_n^α და σ_n^α შემდგომში ვუწოდებთ $\{s_v\}$ მიმდევრობის (მწკვრივის Σu_v) α რიგის ჩეზაროს ჯამებს და ჩეზაროს საშუალოებს. A_n^α-ებს ვუწოდებთ α რიგის ჩეზაროს რიცხვებს. უნდა გვახსოვდეს, რომ მწკვრივების შემთხვევაში $u_0+u_1+u_2+\ldots$ გვაქვს $S_n^{-1}=u_n$.

A_n^α და S_n^α-ს განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ

(i) $A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^\beta$,

(ii) $S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{\nu=0}^n S_\nu^\alpha A_{n-\nu}^\beta$

ყოველი α და β-თვის. კერძოდ, თუ ჩავანაცვლებთ α-ს $\alpha-1$-ით, β-ს 0-ით ,

$$A_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^n A_\nu^{\alpha-1}, \quad S_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^n S_\nu^{\alpha-1}.$$

აქედან,

$$A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}, \quad S_n^\alpha - S_{n-1}^\alpha = S_n^{\alpha-1}.$$

(ii)-დან ვღებულობთ ფუნდამენტალურ ფორმულებს

$$S_n^\beta = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} s_\nu = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^\beta u_\nu,$$
$$\sigma_n^\beta = \sum_{\nu=0}^n \frac{A_n^{\beta-1}}{A_n^\beta} s_\nu = \sum_{\nu=0}^n \frac{A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta} u_\nu.$$

$A_n^\alpha -$ს განსაზღვრების ფორმულიდან პირველ რიგში გამომდინარეობს

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix} \simeq \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (\alpha \neq -1,-2,\ldots).$$

ასე, რომ

$$\sum_{\nu=0}^\infty |A_\nu^\alpha| < +\infty \text{ ყოველი } \alpha < -1\text{-თვის},$$

და ასევე,

თეორემა 3. *A_n^α დადებითია $\alpha > -1$-თვის, ზრდადია (როგორც n-ის ფუნქცია) $\alpha > 0$-თვის და კლებადია $-1 < \alpha < 0$; და $A_n^0 = 1$ ყოველი n-თვის. თუ $\alpha < -1$, A_n^α საკმარისად დიდი n თვის ნიშანგანსაზღვრულია.*

შემდეგში კომპლექსური რიცხვის წარმოსახვითი ნაწილის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ ან $\oint$ ან Im სიმბოლოს. Γ არის ეილერის გამა ფუნქცია, და თვითონ ფორმულის მართებულობა

გამომდინარეობს გაუსის მიერ ამ ფუნქციის განსაზღვრებიდან. შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება ამ ფორმულის ცოტათი უფრო ზუსტი ვარიანტი. სახელდობრ,

$$A_n^\alpha=\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

ამის დასამტკიცებლად აღვნიშნავთ, რომ $\log(1+u)=u+O\left(u^2\right)$ მცირე $|u|$-თვის, და აქედან

$$\log A_n^\alpha=\sum_{\nu=1}^n \log\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)=\alpha\sum_{\nu=1}^n\frac{1}{\nu}+\sum_{\nu=1}^n O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)=\alpha\log\cdot n+\text{ const. }+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

თუ გამოვიყენებთ $b_0\sin x+b_1\sin 2x+\ldots=\oint\left\{e^{ix}\Phi\left(e^{ix}\right)\right\}$ ფორმულას და იმ ფაქტს, რომ მწკვრივის რომლის წევრები არის $O\left(1/v^2\right)$, მისი ნაშთითი წევრი წარმოადგენს $O(1/n)$. თუ უკანასკნელ ფორმულას შევადარებთ მისაღებ ფორმულას, დავინახავთ რომ ჩვენი კონსტანტა არის $\log\{1/\Gamma(\alpha+1)\}$, და მაშასადამე, მივიღეთ სასურველი ტოლობა.

საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ თუ α არის დადებითი მთელი რიცხვი, მაშინ

$$A_n^\alpha=\binom{n+\alpha}{n}=\binom{n+\alpha}{\alpha}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\alpha)}{\alpha!}.$$

თეორემა 4. *თუ მწკვრივი (C,α) კრებადია s ჯამისკენ, $\alpha>-1$, ის ასევე იქნება $(\mathrm{C},\alpha+h)$ კრებადი იგივე s ჯამისკენ, ყოველი $h>0$-თვის.*

თეორემა 5. *თუ მწკვრივი $u_0+u_1+\ldots$ (C,α), $\alpha>-1$, კრებადია სასრული ჯამისკენ, მაშინ $u_n=o\left(n^\alpha\right)$.*

σ_n^α იყოს მწკვრივის ჩეზაროს საშუალოები. მაშინ

$$\sigma_n^{\alpha+h}=\left(\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{h-1}S_\nu^\alpha\right)/A_n^{\alpha+h}=\left(\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{h-1}A_\nu^\alpha\sigma_\nu^\alpha\right)/A_n^{\alpha+h}.$$

მაშასადამე, $\sigma_n^{\alpha+h}$ წარმოადგენს σ_n^α-ების წრფივ საშუალოებს, და თუ გამოვიყენებთ (i), (ii) ფორმულებს და A_n^α-ს მიახლოებით გამოსახულებას, დავადგენთ, რომ რეგულარობის (i), (ii) და (iii) პირობა შესრულებულია $\alpha>-1$-თვის, $h>0$. ეს კი ამტკიცებს თეორემა 4-ს.

თეორემა 5-ის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ

$$u_n/A_n^\alpha=\left(\sum_{\nu=0}^n A_n^{-\alpha-2}S_\nu^\alpha\right)/A_n^\alpha=\left(\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha-2}A_\nu^\alpha.\sigma_\nu^\alpha\right)/A_n^\alpha$$

ვთქვათ, $\sigma_v^\alpha\to 0$ (თუ u_0-ს გამოვაკლებთ მუდმივს, ჩვენ შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რომ $u_0+u_1+\ldots$ (C,α) კრებადია 0-კენ). უნდა ვაჩვენოთ, რომ σ_ν^α-ს კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (i) და (ii) პირობებს (პირობა (iii) ზედმეტია ვინაიდან $\sigma_v^\alpha\to 0$). პირობა (i) გამომდინარეობს A_n^α-ს

მიახლოებითი გამოსათვლელი ფორმულიდან, ვინაიდან $\alpha > -1$. (ii)-ის დასამტკიცებლად ჯერ დავუშვათ $\alpha \geqslant 0$. მაშინ, ვინაიდან $A_n^\alpha \geqslant A_\nu^\alpha > 0$, გვაქვს

$$N_n \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \left|A_{n-\nu}^{-\alpha-2}\right| = \sum_{\nu=0}^{n} \left|A_{\nu}^{-\alpha-2}\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|A_{\nu}^{-\alpha-2}\right| < \infty.$$

თუ $-1 < \alpha < 0$, მაშინ $A_0^{-\alpha-2} = 1, A_\nu^{-\alpha-2} < 0$ $v > 0$-თვის, და A_n^α-ს განსაზღვრებიდან გამომდინარე გვექნება $N_n = 2$ ყოველი n-თვის. რაც ამტკიცებს თეორემა 5-ს.

2.2 (C, α) შეჯამებადობა

ვთქვათ, $G_n^\alpha(t)$ აღნიშნავს (C, α) გულს და $\sigma_n^\alpha(x) = \sigma_n^\alpha(x; f)$ აღნიშნავს (C, α) საშუალოებს $S[f]$-თვის. მაშინ

$$G_n^\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} D_\nu(t)/A_{n,}^\alpha,$$

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) G_n^\alpha(t) dt,$$

$$\sigma_n^\alpha(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi_x(t) G_n^\alpha(t) dt.$$

თუ $0 < \alpha < 1$, უნდა ვაჩვენოთ რომ

$$\left|G_n^\alpha(t)\right| < n+1 \leqslant 2n, \quad \left|G_n^\alpha(t)\right| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha t-(\alpha+1)}$$

$n = 1, 2, \ldots$-თვის, $0 < t \leqslant \pi$, სადაც A_α დამოკიდებულია მხოლოდ α-ზე.

$$\int_0^\pi \left|G_n^\alpha(t)\right| dt < 2n \int_0^{1/n} dt + A_\alpha n^{-\alpha} \int_{1/n}^{\pi} t-\alpha-1 dt < 2 + A_\alpha/\alpha,$$

$$\max_{\delta \leqslant \ell \leqslant \pi} \left|G_n^\alpha(t)\right| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha} \delta^{-(\alpha+1)} \to 0.$$

და

$$\max_{\delta \leqslant l \leqslant \pi} \left|G_n^\alpha(t)\right| \leqslant A_\alpha n^{-\alpha} \delta(\alpha+1) \to 0.$$

დასამტკიცებელი პირველი უტოლობის მართებულობა გამომდინარეობს შემდეგი შეფასებიდან

$$|D_\nu| \leqslant \nu + \frac{1}{2} < n+1.$$

მეორისთვის, გვაქვს

$$G_n^\alpha(t) = \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{\gamma}{2}t} \oint \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} e^{i(\nu+1)t} = \oint \frac{e^{i(n+1)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{\gamma}{2}t} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t}$$
$$= \oint \left\{ \frac{e^{i(n+1)t}}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t} \left[\left(1-e^{-it}\right)^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} e^{-i\nu t} \right] \right\}.$$

ვინაიდან, $A_v^{\alpha-1}$ მონოტონურად კლებადია 0-კენ , უკანასკნელი მწკრივი კრებადია ყოველი t-თვის $0 < t \leqslant \pi$ და მისი ჯამი არის $\leqslant 2A_{n+1}^{\alpha-1}\left|1-e^{-u}\right|^{-1}$. ვინაიდან, $\left|\oint z\right| \leqslant |z|, \left|K_n^\alpha(t)\right|$ მაჟორირდება

$$\left\{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{-\alpha-1}\frac{1}{A_n^\alpha}+\frac{2A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{-2}\right\}\leqslant A_\alpha\left\{n^{-\alpha}t^{-\alpha-1}+n^{-1}t^{-2}\right\}, \qquad (2)$$

როცა $0<t\leqslant\pi$. თუ $nt\geqslant 1$, მაშინ

$$nt^2=(nt)^{1-\alpha}n^\alpha t^{\alpha+1}\geqslant n^\alpha t^{\alpha+1}.$$

(2) უტოლობის მარჯვენა მხარე არ აღემატება $2A_\alpha n^{-\alpha}t^{-\alpha-1}$-ს, და მაშასადამე, მეორე უტოლობა დამტკიცებულია. $0<t\leqslant 1/n$ შემთხვევა პირველი უტოლობის შედეგია. ამით დამტკიცება დასრულებულია.

3 ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული ჯამების კრებადობა

ვთქვათ, E [შესაბამისად, E*] არის ისეთი ნამდვილი $f(t)$ ფუნქციების კლასი, რომლებიც ლებეგის აზრით ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე, და

$$\frac{1}{T}\int_T^{T+c}|f(t)|dt=o(1)[O(1)] \quad \text{, და} \quad \frac{1}{T}\int_{-T-C}^{-T}|f(t)|dt=o(1)[O(1)],$$

როცა $T\to\infty$, ყოველი ფიქსირებული $c>0$-თვის.

ნებისმიერი $f\in E^*$ ფუნქციისა და დადებითი l რიცხვისთვის, ყოველი $x\in(-\infty,\infty)$ და $\mathrm{n}=1,2,\ldots$-თვის, განვიხილოთ

$$\mathrm{S}_n^l(x;f)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^n\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$
$$\sigma_n^l(x;f)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}S_m^l(x;f),$$

სადაც

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ, რომ

$$S_n^l(x;f)=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(u)D_n^l(u-x)du,$$
$$\sigma_n^l(x;f)=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(u)K_n^l(u-x)du,$$

სადაც

$$D_n^l(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos\frac{k\pi t}{l}=\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}},$$

$$K_n^l(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}D_m^l(t)=\frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{n\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right)^2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t).$$

მოცემული $f \in \mathbb{E}^*$ ფუნქციისათვის გვაქვს,

$$\sigma_n^l(x;f) = \frac{1}{2l}\left\{\int_{-l-x}^{l-x} f(x+t)K_n^l(t)dt + \int_{-l+x}^{l+x} f(x-t)K_n^l(t)dt\right\},$$

$$1 = \frac{1}{2l}\left\{\int_{-l-x}^{l-x} K_n^l(t)dt + \int_{-l+x}^{l+x} K_n^l(t)dt\right\},$$

რომელიც ვალიდურია ყოველი $x \in (-\infty, \infty), 1 > 0, \mathrm{n} = 1, 2, \ldots$-თვის. ვთქვათ $g(x)$ არის რაიმე ნამდვილი ფუნქცია, მაშინ

$$\begin{aligned}\sigma_n^l(x;f) - g(x) = &\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}\{f(x+t)+f(x-t)-2g(x)\}K_n^l(t)dt\\ &+ \frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x}\{f(x+t)-g(x)\}K_n^l(t)dt\\ &+ \frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x}\{f(x-t)-g(x)\}K_n^l(t)dt\\ =&I_n^l(x) + J_n^l(x) + V_n^l(x),\ \text{როდესაც}\ l \geqslant x.\end{aligned}$$

ცხადია, რომ

$$I_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^{l-x}\{f(x+t)+f(x-t)-2g(x)\}K_n^l(t)dt$$

$$= \frac{1}{l}\left(\int_0^l - \int_{l-x}^l\right)\{f(x+t)+f(x-t)-2g(x)\}K_n^l(t)dt = J_n^l(x) - R_n^l(x).$$

თუ $-l < a \leqslant x \leqslant b < l$ და $|g(x)| \leqslant K$ (a, b, K მუდმივებია), მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned}&\left|R_n^l(x)\right| \leqslant \frac{1}{l}\left|\int_{l-x}^l |f(x+t)|K_n^l(t)dt\right| + \frac{1}{l}\left|\int_{l-x}^l |f(x-t)|K_n^l(t)dt\right|\\ &+ \frac{2}{l}|g(x)|\left|\int_{l-x}^l K_n^l(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left\{\frac{1}{l}\left|\int_{l-x}^l |f(x+t)|dt\right|\right.\\ &\left.+\frac{1}{l}\left|\int_{l-x}^l |f(x-t)|dt\right| + \frac{2}{l}|g(x)|\right\}\\ &\leqslant \frac{1}{2n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left[\frac{1}{l}\left|\int_l^{l+x}|f(u)|du\right| + \frac{1}{l}\left|\int_{x-l}^{2x-l}|f(u)|du\right| + \frac{2}{l}K.\right.\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{l,n\to\infty} R_n^l(x) = 0 \text{ თანაბრად } x \in \langle a, b\rangle.$$

ანალოგიურად, მივიღებთ

$$\lim_{l,n\to\infty} U_n^l(x) = 0 = \lim_{l,n\to\infty} V_n^l(x).$$

ამ შედეგების გათვალისწინებით გვექნება

$$\sigma_n^l(x;f) - g(x) = J_n^l(x) + o(1),$$

როცა $l,n\to\infty$, თანაბრად $x\in\langle a,b\rangle$.

$J_n^l(x)$-ის ყოფაქცევა ქვემოთ იქნება გამოკვლეული.

ლემა 1. *თუ $f(t)$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე და*

$$\int_{|t|\geq 1}\frac{|f(t)|}{t^2}dt<\infty,$$

მაშინ ყოველი ნამდვილი a,b $(a\leqslant b)$ და $\delta>0$-თვის,

$$\lim_{\frac{l}{n}\to 0}\frac{1}{l}\int_\delta^l f(x+t)K_n^l(t)dt=0\quad(l>\delta),$$

თანაბრად $\langle a,b\rangle$-ზე.

დამტკიცება. ყოველი $\varepsilon>0$-თვის, ავირჩიოთ $\Delta>\max(\delta,|\mathrm{a}|+1,|b|+1)$ ისეთი, რომ

$$\left(\int_{-\infty}^{b-\Delta}+\int_{a+\Delta}^{\infty}\right)\frac{|f(u)|}{u^2}du<\frac{\varepsilon}{4},$$

მაშინ თუ $l/n\leqslant 1$ და $x\in\langle a,b\rangle$, გვექნება

$$\frac{1}{l}\left|\int_\Delta^l f(x\pm t)K_n^l(t)dt\right|\leqslant\frac{l}{2n}\int_\Delta^\infty\frac{|f(x\pm t)|}{t^2}dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემით გვაქვს,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l}\int_\delta^\Delta f(x\pm t)K_n^l(t)dt\\ =&\frac{1}{2\ln}\sin^{-2}\frac{\pi\delta}{2l}\int_\delta^\xi f(x\pm t)\sin^2\frac{n\pi t}{2l}dt\quad(\delta\leqslant\xi\leqslant\Delta).\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე,

$$\frac{1}{l}\left|\int_\delta^\Delta f(x\pm t)K_n^l(t)dt\right|\leqslant\frac{l}{2n\delta^2}\int_\delta^\Delta|f(x\pm t)|dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

თანაბრად $\langle a,b\rangle$-ზე, როცა l/n არის საკმარისად მცირე. მაშასადამე, დამტკიცება დასრულებულია. ■

ლემა 2. *ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე და $f(t)/t^2$ არის სასრული ვარიაციის რომელიღაც $(-\infty,-H\rangle,\langle H,\infty)$ $(H>0)$ ინტერვალებზე. მაშინ, ყოველი ნამდვილი a,b $(a\leqslant b)$ და $\delta>0$-თვის,*

$$\lim_{l^2/n\to 0}\frac{1}{l}\int_\delta^l f(x\pm t)K_n^l(t)dt=0\quad(l>\delta),$$

თანაბრად $\langle a,b\rangle$-ზე.

დამტკიცება. ჟორდანის ცნობილი თეორემის თანახმად,

$$\frac{f(t)}{t^2} = f_1(t) - f_2(t) \text{ როცა } t \in \langle H, \infty) \,,$$

სადაც $f_j(t)$ $(j = 1, 2)$ არაუარყოფითი და არაზრდადი ფუნქციებია მოცემულ ინტერვალზე. მაშასადამე,

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} f(x+t)K_n^l(t)dt = \frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l}\frac{f(x+t)}{(x+t)^2}(x+t)^2K_n^l(t)dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l}\left\{f_1(x+t) - f_2(x+t)\right\}(x+t)^2K_n^l(t)dt, \quad \text{თუ } \Delta \geqslant \delta,\ a+\Delta \geqslant H.$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით გვექნება,

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} f_j(x+t)(x+t)^2K_n^l(t)dt = f_j(x+\Delta)\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{\xi_j}(x+t)^2K_n^l(t)dt \quad (\Delta \leqslant \xi_j \leqslant l)\,.$$

აქედან გამომდინარე

$$\frac{1}{l}\left|\int_{\Delta}^{l} f_j(x+t)(x+t)^2K_n^l(t)dt\right| \leqslant f_j(a+\Delta)\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l}\left|x^2+2xt+t^2\right|K_n^l(t)dt.$$

ამასთანავე,

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} K_n^l(t)dt \leqslant \frac{1}{2ln}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi\Delta}{2l}} \leqslant \frac{l}{2n\Delta^2},$$

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} K_n^l(t)dt \leqslant \frac{l}{2n\Delta^2},$$

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} tK_n^l(t)dt \leqslant \frac{l^2}{2n\Delta},$$

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} t^2K_n^l(t)dt \leqslant \frac{1}{2nl}\int_{\Delta}^{l}\left(\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right)^2 dt \leqslant \frac{l^2}{2n}.$$

შედეგად,

$$\lim_{l^2/n\to 0}\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} f(x+t)K_n^l(t)dt = 0, \text{ თანაბრად} \langle a, b\rangle\text{-ზე.}$$

მარტივი დასანახია, რომ უკანასკნელ დამოკიდებულებაში $f(x+t)$ ფუნქცია შეიძლება ჩანაცვლდეს $f(x-t)$ ფუნქციით.

რაც შეეხება, ინტეგრალი $f(x \pm t)K_n^l(t)$ გამოსახულებიდან, აღებული $\langle\delta, \Delta\rangle$ სეგმენტზე არის საკმარისად მცირე. მაშასადამე, ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $f \in \mathrm{E}^*$ და $l \to \infty, \mathrm{n} \to \infty$, მაშინ გვაქვს

თეორემა 6. *თუ $f(t)$ აკმაყოფილებს ლემა 1-ში [შესაბამისად, ლემა 2-ში] მოცემულ პირობებს, მაშინ ყოველი ნამდვილი x-თვის, რომლისთვისაც*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2g(x)|dt = 0,$$

ადგილი აქვს

$$\lim_{l/n\to 0}\sigma_n^l(x;f) = g(x) \quad \left[\lim_{l^2/n\to 0}\sigma_n^l(x;f) = g(x)\right]$$

დამოკიდებულებას.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$J_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \{f(x+t)+f(x-t)-2g(x)\}K_n^l(t)dt$$

მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $l/n \to 0$ $\quad\big[$ შესაბამისად, $l^2/n \to 0\big]$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\varphi_x(u) = f(x+u)+f(x-u)-2g(x),$$

$$\lambda(t) = \int_0^t |\varphi_{\mathbf{x}}(u)|\, du,$$

და მოცემული $\varepsilon > 0$-თვის, ავირჩიოთ $\eta > 0$ ისეთი, რომ $\lambda(t) \leqslant \varepsilon t$, როცა $0 < t \leqslant \eta$.

მარტივი დასანახია, რომ

$$J_n^l(x) = \frac{1}{l}\left(\int_0^{l/n} + \int_{l/n}^{\eta} + \int_{\eta}^{l}\right)\varphi_x(t)K_n^l(t)dt = A+B+C.$$

ასევე, გვაქვს

$$|A| \leqslant \frac{1}{l}\int_0^{l/n}\left|K_n^l(t)\right| d\lambda(t) \leqslant \frac{n}{2l}\lambda\left(\frac{l}{n}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ თუ } \frac{l}{n} \leqslant \eta.$$

მეორე შემთხვევაში

$$|B| \leqslant \frac{1}{l}\int_{l/n}^{\eta}|\varphi_x(t)|\, K_n^l(t)dt \leqslant \frac{l}{2n}\int_{l/n}^{\eta}\frac{1}{t^2}d\lambda(t) =$$
$$= \frac{l}{2n}\left\{\frac{\lambda(\eta)}{\eta^2} - \frac{\lambda(l/n)}{(l/n)^2} + 2\int_{l/n}^{\eta}\frac{\lambda(t)}{t^3}dt\right\};$$

საიდანაც გვექნება

$$|B| \leqslant \frac{\varepsilon l}{2n}\left\{\frac{1}{\eta} + \frac{n}{l} + 2\int_{l/n}^{\eta}\frac{1}{t^2}dt\right\} \leqslant \frac{3\varepsilon}{2}.$$

ლემა 1-ის [შესაბამისად, ლემა 2-ის] გამოყენებით გვექნება

$$|C| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, როცა l/n [შესაბამისად, l^2/n] საკმარისად მცირეა, მოცემული ლემა მართებულია.

■

4 ძირითადი შედეგები

ამ თავში ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ დირიხლეს ინტეგრალების პირველი და α $(0 < \alpha < 1)$ რიგის ჩეზაროს საშუალოების კრებადობებთან დაკავშირებულ თეორემებს.

განსაზღვრება 6. ვთქვათ, E არის ლოკალურად ინტეგრებად $f(t)$ ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც ყოველი $c > 0$ რიცხვისთვის სრულდება პირობა

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T}^{T+c} |f(t)|dt = 0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T-c}^{-T} |f(t)|dt.$$

მოცემული $f \in E$ ფუნქციისთვის და l დადებითი რიცხვისთვის შემოვიღოთ მიმდევრობები

$$a_k^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k^l = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt,$$

$$S_n^l(x, f) = \frac{a_0^l}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^l \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k^l \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

$x \in (-\infty, \infty), n = 0, 1, 2, \ldots$.

უკანასკნელი ჯამი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$S_n^l(x; f) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) D_n^l(u - x) du,$$

სადაც

$$D_n^l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi t}{l} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2 \sin \frac{\pi t}{2l}}.$$

4.1 დამხმარე ფორმულები და $(C,1)$ შეჯამებადობა

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ძირითად იგივეობებს და შეფასებებს, რომლებიც დაგვეხმარება დირიხლეს პირველი რიგის ჩეზაროს საშუალოების კრებადობასთან დაკავშირებული თეორემის დამტკიცებაში.

$$S_n^l(f,x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)D_n^l(t-x)dt,$$

$$S_n^l(f,x)=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(t+x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt,$$

$$\sigma_n^l(x)=\frac{S_0^l+S_1^l+\ldots+S_{n-1}^l+S_n^l}{n+1}.$$

ასევე, თუ გავითვალისწინებთ

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left[\sin\frac{\pi t}{2l}+\sin 3\frac{\pi t}{2l}+\sin 5\frac{\pi t}{2l}+\cdots+\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\operatorname{Im}\left[e^{i\frac{\pi t}{2l}}+e^{i3\frac{\pi t}{2l}}+\ldots+e^{i(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\operatorname{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}e^{i(2k+1)\frac{\pi t}{2l}}\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\operatorname{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{\pi t}{2l}}e^{i\frac{\pi t}{l}\cdot k}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\operatorname{Im}\left[e^{i\frac{\pi t}{2l}}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\frac{\pi t}{l}}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\operatorname{Im}\left[e^{i\frac{\pi t}{2l}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi t}{l}(n+1)}-1}{e^{i\frac{\pi t}{l}}-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\operatorname{Im}\left[e^{i\frac{\pi t}{2l}(n+1)}\cdot\frac{e^{i\frac{\pi t}{2l}(n+1)}-e^{-i\frac{\pi t}{2l}(n+1)}}{e^{i\frac{\pi t}{2l}}-e^{-i\frac{\pi t}{2l}}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\operatorname{Im}\left[e^{i\frac{\pi t}{2l}(n+1)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{2\sin^2\frac{\pi t}{2l}}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right]^2,$$

მაშინ

$$\sigma_n^l(x)=\frac{1}{l(n+1)}\int_{-l-x}^{l-x}f(t+x)\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{2\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}\frac{1}{2}dt=\frac{2l}{2l}=1,$$

$$\int_{-l-x}^{l-x}\cos\frac{\pi kt}{l}dt=\frac{l}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{l}t\Big|_{-l-x}^{l-x}=\frac{l}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{l}(l-x)$$

$$-\frac{l}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{l}(l+x)=\frac{l}{\pi k}\sin\left(\pi k-\frac{\pi k}{l}x\right)$$

$$+\frac{l}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{l}x+\pi k\right)=0$$

მივიღებთ,

$$\frac{1}{(n+1)l}\int_{-l-x}^{l-x}\sum_{k=0}^{n}D_k^l(t)dt=1.$$

$$G_n^l(t):=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k^l(t).$$

ცხადია, $G_n^l(t)$-ს აქვს შემდეგი თვისებები:

(1) $\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}G_n^l(t)dt=1,\forall x\in\mathbb{R}$;

(2) $G_n^l(t)=\frac{1}{(n+1)2}\left[\frac{\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right]^2\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}$;

(3) თუ $0<\delta<l$, $\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\sigma\le|t|\le l}G_n^l(t)\right\}=0$.

$$G_n^l(t)=\frac{1}{(n+1)\cdot 2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\right]^2\le\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi t}{2l}}$$

$$\le\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi\delta}{2l}}.$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{\sigma\le|t|\le l}G_n^l(t)\right\}\to 0.$$

$$\sigma_n^l(x)=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(t+x)G_n^l(t)dt.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7. *ვთქვათ,* $f\in E$ *და*

$$\int_{|t|\ge 1}\frac{|f(t)|}{t^2}dt<\infty.$$

თუ $f\in C[a,b]$ *, მაშინ*

$$\delta_n^l(x)\rightrightarrows f(x),$$

როცა $l,n\to\infty$ *და* $\frac{l}{n}\to 0$, *თანაბრად* $[a,b]$ *ინტერვალზე.*

დამტკიცება. ვთქვათ, x არის $f(t)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი.

$$\left|\delta_n^l(x)-f(x)\right|=\left|\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}(f(t+x)-f(x))G_n^l(t)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{l}+\int_{-l-x}^{-l}-\int_{l-x}^{l}\right)(f(t+x)-f(x))G_n^l(t)dt\right|.$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, $|f(t+x)-f(x)|<\varepsilon l$, როცა $|t|<\delta$.

$$\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x+t)-f(x))G_n^l(t)dt\right|\le\left|\frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))G_n^l(t)\right|$$

$$+\left|\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}(f(x+t)-f(x))G_n^l(t)dt\right|<\varepsilon$$

$$+\left|\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}(f(x+t)-f(x))G_n^l(t)dt\right|$$

თავის მხრივ, სამკუთხედის უტოლობით გვაქვს

$$\left|\frac{1}{l}\int_{\delta\le t|\le l}(f(x+t)-f(x))G_n^l(t)dt\right|$$

$$\le\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}|f(x+t)|G_n^l(t)dt+\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}|f(x)|G_n^l(t)dt.$$

(3)-ე თვისებიდან გამომდინარე

$$|f(x)|\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}G_n^l(t)dt\rightrightarrows 0,$$

როცა $l,n\to\infty$.

ცხადია, თუ $f(t)$ ფუნქცია უწყვეტია x წერტილში, მაშინ $|f(t)|$ ასევე იქნება უწყვეტი იგივე წერტილში.

$$\frac{1}{l}\int_{\delta\le|t|\le l}|f(x+t)|G_n^l(t)dt=\frac{1}{l}\left(\int_{\delta}^{l}+\int_{-l}^{-\delta}\right)\mid f(x+t)\mid G_n^l(t)dt.$$

რადგან

$$\int_{|t|\ge 1}\left|\frac{f(t)}{t^2}\right|dt<\infty,$$

ამიტომ $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისთვის $\exists\Delta>0$ ისეთი, რომ

$$\int_{\Delta}^{\infty}\frac{|f(x+t)|}{t^2}dt<\varepsilon.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l}|f(x+t)|G_n^l(t)dt=\frac{1}{2l(n+1)}\int_{\Delta}^{l}|f(x+t)|\frac{\sin^2(n+1)\frac{\pi t}{2l}}{\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt$$

$$\le\frac{1}{2l(n+1)}\int_{\Delta}^{l}|f(x+t)|\cdot\frac{l^2}{t^2}dt=\frac{l}{2(n+1)}\int_{\Delta}^{l}\frac{\mid f(x+t)\mid}{t^2}dt<\frac{l}{n}\cdot\varepsilon.$$

ეს უკანასკნელი კი კრებადია ნულისკენ , როცა $l,n\to\infty$ და $\frac{l}{n}\to 0$.

თუ $0\le a\le x\leqslant b<l$ და $|f(x)|\le M$, ასეთი M არსებობს f-ის უწყვეტობის გამო.

$$\left|\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{-l}(f(t+x)-f(x))G_n^l(t)dt\right|$$

$$=\frac{1}{l}\left|\int_{-l-x}^{-l}(f(t+x)-f(x))\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{2(n+1)\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt\right|$$

$$\le\frac{1}{2l(n+1)}\int_{-l-x}^{-l}\mid f(t+x)-f(x)\mid\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2l}(n+1)}{\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt$$

$$\leq \frac{1}{2l(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(l-b)}{2l}} \int_{-l-x}^{-l} \mid f(t+x) - f(x) \mid \sin^2 \frac{\pi t}{2l}(n+1)dt$$

$$\leq \frac{1}{l \cdot n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(l-b)}{2l}} \left(\int_{-l-x}^{-l} |f(t+x)|dt + bM \right)$$

$$= \frac{1}{n \sin^2 \frac{\pi(l-b)}{2l}} \cdot \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-l+x} |f(t)|dt + bM \right) \rightrightarrows 0,$$

როცა $n, l \to \infty$. ანალოგიურად დამტკიცდება მოცემული წევრის თანაბრად კრებადობა 0-კენ, როცა $-l < b \leq x \leqslant a < 0$.

ახლა შევაფასოთ ინტეგრალი

$$T_{l,n}(x) := \frac{1}{l} \int_{\delta}^{\Delta} |f(x+t)| G_n^l(t)dt.$$

ჯერ დავუშვათ $f(t)$ უწყვეტია $[a+\delta, b+\Delta]$ სეგმენტზე.

განვიხილოთ $[\delta, \Delta]$ სეგმენტის ისეთი დაყოფა $\delta = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = \Delta$, რომ

$$Osc \mid f(x+t) \mid_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} < \frac{\varepsilon \delta}{4\Delta}.$$

$k = 0, 1, \cdots, s-1.$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$T_{l,n}(x) = \frac{1}{2(n+1) l \sin^2 \frac{\pi \delta}{2l}} \int_{\delta}^{\xi} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt$$

$$\leq \frac{l}{2(n+1) l \cdot \delta} \int_{\delta}^{\xi} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt \quad (\delta < \xi < \Delta, l > \Delta).$$

$$\Rightarrow T_{l,n}(x) \leq \frac{1}{2(n+1)\delta} \int_{\delta}^{\xi} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt.$$

$$W_{l,n}(x) := \int_{\delta}^{\xi} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt.$$

თუ $t_p < \xi \leq t_{p+1} \quad (0 \leq p \leq s-1)$, მაშინ გვაქვს

$$W_{l,n}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l}$$

$$+ \int_{t_p}^{\xi} |f(x+t)| \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (|f(x+t)| - |f\,(x+t_k)|) \sin^2 \frac{\pi t}{2l}(n+1)dt$$

$$+ \int_{t_p}^{\xi} (|f(x+t)| - |f\,(x+t_p)\,|) \sin^2 \frac{\pi t}{2l}(n+1)dt$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-1} |f\,(x+t_k)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin^2 (n+1) \frac{\pi t}{2l} dt$$

$$+ \mid f(x+t_k) \mid \int_{t_p}^{\xi} \sin^2(n+1)\frac{\pi t}{2l} dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon\delta}{4\Delta}(\Delta-\delta) + M\sum_{i=0}^{p}(t_{i+1}-t_i) < \frac{\varepsilon\delta}{2} + M(\Delta-\delta).$$

მაშასადამე,

$$T_{l,n}(x) < \frac{1}{(n+1)2\delta}\cdot\left(\frac{\varepsilon\delta}{2} + M(\Delta-\delta)\right) \to 0,$$

როცა $n \to \infty$.

$$\Longrightarrow \; T_{l,n}(x) \rightrightarrows 0,$$

როცა $l, n \to \infty$.

ახლა, ვინაიდან ყოველი ლებეგის აზრით ლოკალურად ინტეგრებადი $f(t)$ ფუნქციისთვის არსებობს უწყვეტი $g(t)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\forall \varepsilon > 0$-თვის

$$\int_{a+\delta}^{b+\Delta} |f(t)-g(t)|dt < \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, რადგან

$$T_{l,n}(x) = \frac{1}{l}\int_{\delta}^{\Delta}(|f(x+t)| - |g(x+t)|)G_n^l(t)dt$$

$$+\frac{1}{l}\int_{\delta}^{\Delta}|g(x+t)|G_n^l(t)dt,$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$T_{l,n}(x) \leq \frac{1}{(n+1)2l\sin^2\frac{\pi\delta}{2l}}\int_{\delta}^{\Delta} \mid |f(x+t)| - |f(x+t)| \mid dt + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$< \frac{\varepsilon\delta}{2\delta\cdot 2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4n} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

ანალოგიურად მტკიცდება

$$\int_{-l}^{-\delta}|f(x+t)-f(x)|G_n^l(t)dt \rightrightarrows 0,$$

როცა $l, n \to \infty$ და $\frac{l}{n} \to 0$.

მაშასადამე, მივიღეთ

$$\left|\delta_n^l(x) - f(x)\right| \rightrightarrows 0,$$

რაც იგივეა

$$\delta_n^l(x) \rightrightarrows f(x)$$

$[a, b]$ ინტერვალზე, როცა $l, n \to \infty$ და $\frac{l}{n} \to 0$. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. ■

მაგალითი 1. განვიხილოთ $f(t) = cos(t)$ ფუნქცია. ცხადია, ეს ფუნქცია უწყვეტია ყოველ $[a, b]$ ინტერვალზე და ეკუთვნის E კლასს, ვინაიდან შემოსაზღვრულია. ასევე,

$$\int_{|t|\geq 1} \frac{|cos(t)|}{t^2} dt \leq \int_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^2} dt < \infty,$$

ამიტომ მოცემული თეორემიდან გამომდინარეობს

$$\delta_n^l(x) \rightrightarrows cos(x),$$

როცა $l, n \to \infty$ და $\frac{l}{n} \to 0$.

4.2 დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების (C,α) საშუალოების კრებადობა

ამ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ ნაშრომის ორ ძირითად თეორემას, რომლებიც შეეხება დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების (C,α) საშუალოების თანაბრად კრებადობას რაიმე ფუნქციისაკენ.

მანამდე კი, შევეხოთ ამ თეორემის დამტკიცებისთვის გამოსადეგ იგივეობებსა და უტოლობებს, და ვაჩვენოთ მათი მართებულობა.

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} = \left(\frac{\alpha}{n}+1\right)\left(\frac{\alpha}{n-1}+1\right)\cdots(\alpha+1)$$
$$= \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ყოველი $i \in N$-თვის მართებულია

$$\left|D_i^l(t)\right| = \left|\frac{\sin(2i+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\right| \le \frac{(2i+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\frac{t}{l}} = \frac{(2i+1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{\pi}} \le n+\frac{1}{2},$$

რადგან თუ $|t| \le l,\quad \left|\sin\frac{\pi t}{2l}\right| \ge \frac{|t|}{l}.$

დირიხლეს (C,α) გულებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\left|G_n^{l,\alpha}(t)\right| \le \frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{A_n^\alpha} + \frac{2A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\cdot\frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^2}$$
$$\leqslant B_\alpha\left(n^{-\alpha}\left(\frac{t}{l}\right)^{-\alpha-1} + n^{-1}\left(\frac{t}{l}\right)^{-2}\right) =$$
$$= B_\alpha\left(n^{-\alpha}t^{-(\alpha+1)}l^{\alpha+1} + n^{-1}t^{-2}l^2\right) \le 2B_\alpha h^{-\alpha}\left(\frac{t}{l}\right)^{-\alpha-1}.$$

თუ $\dfrac{nt}{l} \geqslant 1$ და $0<\alpha<1$

$$n\left(\frac{t}{l}\right)^2 = \left(n\frac{t}{l}\right)^{1-\alpha}\left(n\frac{t}{l}\right)^\alpha\cdot\frac{t}{l} = \left(n\frac{t}{l}\right)^{1-\alpha} n^\alpha\left(\frac{t}{l}\right)^{\alpha+1}$$
$$\ge n^\alpha\left(\frac{t}{l}\right)^{\alpha+1}.$$

ხოლო, $[\delta, l]$ ინტერვალზე მართებულია შემდეგი შეფასება

$$\max_{\delta\le t\le l}\left|G_n^{l,\alpha}(t)\right| \le 2B_\alpha n^{-\alpha}\left(\frac{\delta}{l}\right)^{-\alpha-1} = \frac{2B_\alpha l^{\alpha+1}}{\delta^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$$
$$= C_\alpha\left(\frac{l}{n}\right)^\alpha\cdot l.$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$\oint \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{A_n^\alpha (2\sin\frac{t}{2})}\left[\frac{1}{(1-e^{-it})^\alpha} - A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}} - \right.$$

$$\left.\sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(v+1)t}}{1-e^{-it}}\right] = \frac{1}{A_n^\alpha}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)t - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{(n+1)\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$+ \frac{2\theta\alpha(1-\alpha)}{(n+1)(n+2)\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3}.$$

თუ მნიშვნელიდან გავიტანთ თანამამრავლად $e^{\frac{-it}{2}}$ მარტივი დასანახია, რომ

$$\oint \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin\frac{t}{2}\left(1-e^{-it}\right)}\cdot\frac{A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = \frac{\alpha}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}.$$

ასევე,

$$\oint e^{-i\left(-(n+1)t+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot e^{-it}\sum_{k=m}^{n}\left(e^{-it}\right)^k = \oint e^{-i\left(-nt+\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{k=m}^{n}\left(e^{-it}\right)^k$$

$$= \oint e^{-i\left((m-n)t+\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-m}\left(e^{-it}\right)^k = \oint e^{\left(-i(m-n)t+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\frac{e^{-i\frac{tn}{2}}\cdot\sin(n-m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \oint e^{-i\left(\left(m-\frac{n}{2}\right)t+\frac{\pi}{2}\right)}\frac{\sin(n-m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(\frac{n}{2}-m\right)t-\frac{\pi}{2}\right)\sin(n-m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} =: \mathrm{S}_{m,n}(t).$$

აბელის გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ

$$\oint \frac{e^{(n+\frac{1}{2})t}}{1-e^{-it}}\sum_{v=n+1}^{m} e^{-i(v+1)t}A_{v+1}^{\alpha-2} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left[\sum_{v=n+1}^{m-1} S_{n+1,v}(t)A_{v+2}^{\alpha-3} + S_{n+1,m}(t)A_{m+1}^{\alpha-2}\right],$$

სადაც $-1<\alpha<1,\ m\geq n.$

$$\lim_{m\to\infty} S_{m,n+1}(t)\frac{A_{m+1}^{\alpha-2}}{A_n^\alpha} = \lim_{m\to\infty}\frac{\sin\left(\left(\frac{n}{2}-m\right)t-\frac{\pi}{2}\right)\sin(n-m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$\times\frac{(m+1)^{\alpha-2}}{n^\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1)} = 0.$$

ასევე, გვაქვს

$$-\sum_{v=n+1}^{m-1} A_{v+2}^{\alpha-3} \leq \sum_{v=n+1}^{m-1}\sin\frac{t}{2}S_{n+1,v}(t)A_{v+2}^{\alpha-3} \leq \sum_{v=n+1}^{m-1} A_{v+2}^{\alpha-3}$$

$$-\sum_{v=n+3}^{m+1} A_{v}^{\alpha-3} \leq \sum_{v=n+3}^{m+1}\sin\frac{t}{2}S_{n+1,v-2}(t)A_{v}^{\alpha-3} \leq \sum_{v=n+3}^{m+1} A_{v}^{\alpha-3}$$

$$-\left(A_{m+1}^{\alpha-2}-A_{n+2}^{\alpha-2}\right) \leq \sum_{v=n+3}^{m+1}\sin\frac{t}{2}S_{n+1,v-2}(t)A_{v}^{\alpha-3} \leq \left(A_{m+1}^{\alpha-2}-A_{n+2}^{\alpha-2}\right).$$

შესაბამისად, მოიძებნება θ, $|\theta| \leq 1$ ისეთი, რომ

$$\sum_{v=n+3}^{m+1} \sin\frac{t}{2} S_{n+1,v-2}(t) A_v^{\alpha-3} = \frac{\theta}{\sin\frac{t}{2}} \left(A_{m+1}^{\alpha-2} - A_{n+2}^{\alpha-2}\right). \tag{3}$$

(3) ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \to \infty$ მივიღებთ

$$\sum_{v=n+3}^{\infty} S_{n+1,v-2}(t) A_v^{\alpha-3} = -\frac{\theta}{\sin\frac{t}{2}} A_{n+2}^{\alpha-2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{A_{n+2}^{\alpha-2}}{A_n^{\alpha}} = \frac{(\alpha-1)\alpha}{(n+1)(n+2)},$$

მივიღებთ

$$\oint -\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{A_n^{\alpha}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)} \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-2} \frac{e^{i(v+1)t}}{1-e^{-it}}$$
$$= \frac{2\theta(\alpha-1)\alpha}{(n+1)(n+2)\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3}, \quad |\theta| \leq 1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{\pi t}{l} := t$, მაშინ გვექნება

$$\oint -\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}}{A_n^{\alpha}\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)} \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-2} \frac{e^{i(v+1)\frac{\pi t}{l}}}{1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}} =$$
$$= \frac{2\theta(\alpha-1)\alpha}{(n+1)(n+2)\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^3}, \quad |\theta| \leq 1.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\frac{1}{\left(1-e^{-it}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{e^{-i\frac{t\alpha}{2}+i\frac{\pi\alpha}{2}}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha}} = \frac{e^{i\left(\frac{t\alpha}{2}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha}},$$

გვექნება

$$\oint \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2A_n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}t}\left(1-e^{-it}\right)^{-\alpha} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2A_n^{\alpha}\sin\frac{1}{2}t} \cdot \frac{e^{i\left(\frac{t\alpha}{2}-\frac{\pi\alpha}{2}\right)}}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{A_n^{\alpha}} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)t - \frac{1}{2}\pi\alpha\right]}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{\alpha+1}}$$

ამით დამტკიცება დასრულებულია. და მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ აღნიშვნას $\frac{\pi t}{l} :=$ t გვექნება

$$\oint \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{l}}}{A_n^\alpha (2\sin\frac{\pi t}{2l})}\left[\frac{1}{\left(1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}\right)^\alpha} - A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)\frac{\pi t}{l}}}{1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}}\right.$$
$$\left. - \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(v+1)\frac{\pi t}{l}}}{1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}}\right] = \frac{1}{A_n^\alpha}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)\frac{\pi t}{l}-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{(n+1)\left(\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^2}$$
$$+ \frac{2\theta\alpha(1-\alpha)}{(n+1)(n+2)\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^3}.$$

შემდგომში ვაჩვენებთ, რომ

$$G_n^\alpha(t) = \oint\left\{\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{A_n^\alpha\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)}\left[\frac{1}{(1-e^{-it})^\alpha} - A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-it}} - \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)t}}{1-e^{-it}}\right]\right\}. \qquad (4)$$

მანამდე დავამტკიცოთ

$$G_n^\alpha(t) = \frac{1}{2A_n^\alpha \sin\frac{1}{2}t}\oint\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}e^{i(\nu+\frac{1}{2})t} = \oint\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2A_n^\alpha\sin\frac{1}{2}t}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{\alpha-1}e^{-i\nu t}$$
$$= \oint\left\{\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2A_n^\alpha\sin\frac{1}{2}t}\left[\left(1-e^{-it}\right)^{-\alpha} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_v^{\alpha-1}e^{-i\nu t}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{A_n^\alpha}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)t-\frac{1}{2}\pi\alpha\right]}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{\alpha+1}} + \frac{2\theta\alpha}{n\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^2}, \quad (|\theta|\leqslant 1)$$

ტოლობათა მიმდევრობის უკანასკნელი ტოლობის მართებულობა.

აბელის გარდაქმნის ფორმულა

$$\sum_{k=m}^{N} a_k b_k = \sum_{k=m}^{N-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$
$$A_k = \sum_{i=m}^{N} a_i.$$

გეომეტრიული პროგრესიის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\sum_{k=m}^{N}\left(e^{-it}\right)^k = e^{-imt}\sum_{k=0}^{N-m}\left(e^{-it}\right)^k$$
$$= e^{-imt}\frac{e^{-i(N-m+1)t}-1}{e^{-it}-1} = e^{-imt}e^{-i\frac{(N-m)}{2}t}\frac{\sin(N-m+1)t}{\sin\frac{t}{2}}$$
$$= e^{-i\frac{(N+m)t}{2}}\frac{\sin(N-m+1)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

აბელის გარდაქმნის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\oint e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{V=n+1}^{N} A_V^{\alpha-1} e^{-ivt} = \oint \left[-\sum_{V=n+1}^{N-1} e^{-i(V-n)\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin(V-n)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot A_{V+1}^{\alpha-2} \right.$$
$$\left. + e^{-i(N-n)\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin(N-n)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot A_N^{\alpha-1} \right] \tag{5}$$
$$= \sum_{V=n+1}^{N-1} \frac{\sin(V-n)\frac{t}{2} \cdot \sin(V-n)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} A_{V+1}^{\alpha-2} - \frac{\sin^2(n-N)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} A_N^{\alpha-1}.$$

ამავდროულად,

$$-\sum_{V=n+1}^{N-1} A_{V+1}^{\alpha-2} \leq \sum_{V=n+1}^{N-1} \sin^2(V-n)\frac{t}{2} A_{V+1}^{\alpha-2} \leq \sum_{V=n+1}^{N-1} A_{V+1}^{\alpha-2}.$$

ასევე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sum_{V=n+1}^{N} A_{V+1}^{\alpha-2} = \sum_{V=n+2}^{N} A_V^{\alpha-2} = A_N^{\alpha-1} - A_{n+1}^{\alpha-1}.$$

გვექნება,

$$-\left(A_N^{\alpha-1} - A_{n+1}^{\alpha-1}\right) \leq \sum_{V=n+1}^{N-1} \sin^2(V-n)\frac{t}{2} A_{V+1}^{\alpha-2} \leq \left(A_N^{\alpha-1} - A_{n+1}^{\alpha-1}\right).$$

შესაბამისად, $\exists\theta, |\theta| \leq 1$ ისეთი რომ

$$\sum_{V=n+1}^{N-1} \sin^2(V-n)\frac{t}{2} A_{V+1}^{\alpha-2} = \theta\left(A_N^{\alpha-1} - A_{n+1}^{\alpha-1}\right). \tag{6}$$

თუ (5) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $N \to \infty$ და გავითვალისწინებთ (6) ტოლობას, მივიღებთ

$$\oint e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{V=n+1}^{\infty} A_V^{\alpha-1} e^{-iVt} = -\frac{2\cdot\theta}{2\cdot\sin\frac{t}{2}} \cdot A_{n+1}^{\alpha-1}.$$

ამასთანავე,

$$\frac{A_{n+1}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} = \frac{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{(n+1)!}}{\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\dots\cdot(\alpha+n)}{n!}} = \frac{\alpha}{n+1}.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{1}{A_n^{\alpha} 2\sin\frac{t}{2}} \oint e^{\left(in+\frac{1}{2}\right)t} \sum_{V=n+1}^{\infty} A_V^{\alpha-1} e^{-iVt} = \frac{2\theta\alpha}{(n+1)\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}.$$

როცა $N \to \infty$ (5) ტოლობის მაკლები კრებადია 0-კენ, რადგან $\sin^2(n-N)\frac{t}{2}$ შემოსაზღვრულია, ხოლო $A_N^{\alpha-1} \to 0$. მაშასადამე, მივიღეთ სასურველი ტოლობის მართებულობა.

მარტივი დასანახია, რომ უკანასკნელ დამტკიცებულ ტოლობაში თუ t-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $\frac{\pi t}{l}$, მივიღებთ (მტკიცება ზუსტად ანალოგიურად მიმდინარეობს)

$$
\begin{aligned}
&G_n^{l,\alpha}(t)=\frac{1}{2A_n^\alpha\sin\frac12\frac{\pi t}{l}}\oint\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}e^{i(\nu+\frac12)t}=\oint\frac{e^{i(n+\frac12)\frac{\pi t}{l}}}{2A_n^\alpha\sin\frac12\frac{\pi t}{l}}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{\alpha-1}e^{-i\nu\frac{\pi t}{l}}\\
&=\oint\left\{\frac{e^{i(n+\frac12)\frac{\pi t}{l}}}{2A_n^\alpha\sin\frac12\frac{\pi t}{l}}\left[\left(1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}\right)^{-\alpha}-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}A_v^{\alpha-1}e^{-i\nu\frac{\pi t}{l}}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{A_n^\alpha}\frac{\sin\left[\left(n+\frac12+\frac12\alpha\right)\frac{\pi t}{l}-\frac12\pi\alpha\right]}{\left(2\sin\frac12\frac{\pi t}{l}\right)^{\alpha+1}}+\frac{2\theta\alpha}{n\left(2\sin\frac12\frac{\pi t}{l}\right)^2},\quad(|\theta|\leqslant 1).
\end{aligned}
$$

ახლა კი შევუდგეთ (4) ტოლობის მართებულობის ჩვენებას. გეომეტრიული პროგრესიის ფორმულისა და აბელის გარდაქმნის ექვივალენტური ფორმულირების (სადაც, კერძო ჯამების ათვლის ინდექსი იწყება 1-დან) გამოყენებით გვექნება

$$
\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{m}e^{-ivt}=e^{-it}\sum_{v=0}^{m-1}e^{-ivt}=e^{-it}\frac{\left(e^{-imt}-1\right)}{e^{-it}-1}.\\
&\sum_{v=n+1}^{m}A_v^{\alpha-1}e^{-ivt}=A_m^{\alpha-1}e^{-it}\frac{\left(e^{-imt}-1\right)}{e^{-it}-1}\\
&-A_{n+1}^{\alpha-1}e^{-it}\frac{\left(e^{-int}-1\right)}{e^{-it}-1}-\sum_{v=n+1}^{m-1}\left(A_{v+1}^{\alpha-1}-A_v^{\alpha-1}\right)e^{-it}\frac{\left(e^{-ivt}-1\right)}{e^{-it}-1}\\
&=A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-i(m+1)t}}{e^{-it}-1}-A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}-A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{e^{-it}-1}\\
&+A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}-\sum_{v=n+1}^{m-1}A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)t}}{e^{-it}-1}+\sum_{v=n+1}^{m-1}A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}\\
&=A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-i(m+1)t}}{e^{-it}-1}-A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{e^{-it}-1}-\sum_{v=n+1}^{m-1}A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)t}}{e^{-it}-1}\\
&+\left(-A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}+A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}+\sum_{v=n+2}^{m}A_v^{\alpha-2}\frac{e^{-it}}{e^{-it}-1}\right).
\end{aligned}
$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$
A_{n+1}^{\alpha-1}=\sum_{v=0}^{n+1}A_v^{\alpha-2},
$$

გვექნება

$$
\sum_{v=n+1}^{m}A_v^{\alpha-1}e^{-ivt}=A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-i(m+1)t}}{e^{-it}-1}-A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{e^{-it}-1}-\sum_{v=n+1}^{m-1}A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)t}}{e^{-it}-1}
$$

უკანასკნელ ტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$
A_m^{\alpha-1}\frac{e^{-i(m+1)t}}{e^{-it}-1}\to 0,
$$

რადგან პირველი თანამამრავლი 0-კენ კრებადია, მეორე კი შემოსაზღვრული, მივიღებთ

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} A_v^{\alpha-1} e^{-ivt} = -A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{e^{-it}-1} - \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)t}}{e^{-it}-1}.$$

ამით (4) ტოლობის მართებულობა ნაჩვენებია. თუ ამ ტოლობაში t-ს ჩავანაცვლებთ $\frac{\pi t}{l}$ გამო-სახულებით მივიღებთ

$$G_n^{l,\alpha}(t) = \oint \left\{ \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi t}{l}}}{A_n^{\alpha}\left(2\sin\frac{1}{2}\frac{\pi t}{l}\right)} \left[\frac{1}{(1-e^{-it})^{\alpha}} - A_{n+1}^{\alpha-1}\frac{e^{-i(n+1)t}}{1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}} - \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{v+1}^{\alpha-2}\frac{e^{-i(v+1)\frac{\pi t}{l}}}{1-e^{-i\frac{\pi t}{l}}} \right] \right\}.$$

აბელის გარდაქმნის განმეორებითი გამოყენების შედეგად შეგვიძლია მივიღოთ (C,α) გუ-ლების უფრო ზუსტი მიახლოება (საუბარია (4) ტოლობაზე).

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება α რიგის ჩეზაროს საშუალოებისა და $g(x)$ ფუნქციის სხვაობის შეფასება.

$$\sigma_n^{l,\alpha}(x) - g(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}(f(x+t)+f(x-t)-2g(x))G_n^{l,\alpha}(t)d$$
$$+\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x}(f(x+t)-g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt$$
$$+\frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x}(f(x-t)-g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt = I_n^{l,\alpha}(x)+U_n^{l,\alpha}(x)+V_n^{l,\alpha}(x).$$
$$I_n^{l,\alpha}(x) = \frac{1}{l}\int_0^{l-x}(f(x+t)+f(x-t)-2g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt$$
$$=\frac{1}{l}\left(\int_0^l - \int_{l-x}^l\right)(f(x+t)+f(x-t)-2g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt$$
$$=J_n^{l,\alpha}(x) - R_n^{l,\alpha}(x).$$

ვთქვათ, $|g(x)| \le k, \quad x\in[a,b]$, მაშინ

$$\left|R_n^{l,\alpha}(x)\right| \le \frac{1}{l}\left(\int_{l-x}^{l}|f(x+t)||G_n^{l,\alpha}(t)|dt + \int_{l-x}^{l}|f(x-t)||G_n^{l,\alpha}(t)|dt\right.$$
$$\left.+2|g(x)|\int_{l-x}^{l}|G_n^{l,\alpha}(t)|dt\right) = \frac{1}{2l\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left(\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|dt\right.$$
$$\left.+\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|dt + 2k(b-a)\right) = \frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left(\frac{1}{l}\int_{l}^{l+x}|f(t)|dt\right.$$
$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l+x}^{-l+2x}|f(t)|dt + \frac{2k(b-a)}{l}\right) \rightrightarrows 0,$$

როცა $l\to\infty$, რადგან $f\in E$.

იგივე მიზეზით,

$$\left|U_n^{l,\alpha}(x)\right| \le \frac{1}{2l\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2x}|f(t)|dt + \frac{2k(b-a)}{l}\right) \rightrightarrows 0$$

თანაბრად $[a,b]$−ზე, როცა $l\to\infty$.

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ

$$V_n^{l,\alpha}(x) \rightrightarrows 0$$

თანაბრად $[a,b]-$ზე, როცა $l \to \infty$.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ლემები, რომლებიც ძირითადი თეორემების დამტკიცებაში დაგვეხმარება.

ლემა 3. *ვთქვათ, f ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე და*

$$\int_{|t|\geq 1} \frac{|f(t)|}{|t|^{\alpha+1}} < \infty, \tag{7}$$

მაშინ

$$\lim_{\frac{l}{n}\to 0} \frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} f(x\pm t)G_n^{l,\alpha}(t)dt = 0,$$

ყოველი ფიქსირებული $\delta < l$-თვის, როცა $l, n \to \infty$, $\frac{l}{n} \to 0$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ზე.

დამტკიცება.

(7) პირობიდან გამომდინარე $\exists \Delta > max\{|a|+1, |b|+1, \delta\}$ ისეთი, რომ

$$\left(\int_{-\infty}^{b-\Delta} + \int_{\Delta+a}^{\infty}\right) \frac{|f(t)|}{|t|^{\alpha+1}} dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამის გათვალისწინებით გვექნება,

$$\left|\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} f(x\pm t)G_n^{l,\alpha}(t)dt\right| \leq \frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} |f(x\pm t)| \mid G_n^{l,\alpha},(t)\mid dt$$
$$\leq \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} \int_{\Delta}^{l} \frac{|f(x\pm t)|}{|t|^{\alpha+1}} dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

ასევე,

$$\left|\frac{1}{l}\int_{\delta}^{\Delta} f\left(x\pm t\right) G_n^{l,\alpha}(t)dt\right| \leq C_{\alpha}\left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2},$$

თუ $\dfrac{l}{n} < \min\left\{\delta, \left(\dfrac{\varepsilon}{2C_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$

შესაბამისად, თუ $\frac{l}{n}$ აკმაყოფილებს უკანასკნელ პირობას, მაშინ ყოველი $\epsilon > 0$-თვის

$$\left|\frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} f\left(x\pm t\right) G_n^{l,\alpha}(t)dt\right| < \varepsilon$$

■

ლემა 4. *ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქცია ლებეგის აზრით ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე და $\frac{f(t)}{t^2}$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული ვარიაცია რომელიღაც $(-\infty, H]$, $[H, +\infty)$ ინტერვალებზე ($H > 0$), მაშინ ყოველი ნამდვილი $a \le b$-თვის, $\delta > 0$ და $0 < \alpha < 1$, გვაქვს*

$$\lim_{\frac{l^2}{n^\alpha} \to 0} \frac{1}{l} \int_\delta^l f(x \pm t) G_n^{l,\alpha}(t) dt = 0,$$

თანაბრად $[a, b]$-ზე.

დამტკიცება.

ჟორდანის თეორემის თანახმად ყოველი შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ორი არაუარყოფითი და არაზრდადი ფუნქციის სხვაობის სახით. მაშასადამე,

$$\frac{f(t)}{t^2} = f_1(t) - f_2(t), \ t \in [H, +\infty)$$

სადაც f_1, f_2 არაუარყოფითი, არაზრდადი ფუნქციებია. ამის გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{1}{l} \int_\Delta^l f(x+t) G_n^{l,\alpha}(t) dt = \frac{1}{l} \int_\Delta^l \frac{f(x+t)}{(x+t)^2} \cdot (x+t)^2 G_n^{l,\alpha}(t) dt$$
$$= \frac{1}{l} \int_\Delta^l \left(f_1(x+t) - f_2(x+t)\right)(x+t)^2 G_n^{l,\alpha}(t) dt,$$

როცა $\Delta \ge \delta, \ a + \Delta \ge H.$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{l} \int_\Delta^l f_j(x+t)(x+t)^2 G_n^{l,\alpha}(t) dt = f_j(x+\Delta) \cdot \frac{1}{l} \int_\Delta^\xi (x+t)^2 G_n^{l,\alpha}(t) dt$$
$$= f_j(x+\Delta) \cdot \frac{1}{l} \int_\Delta^l \left(x^2 + 2xt + t^2\right) G_n^{l,\alpha}(t) dt,$$

სადაც

$$G_n^{l,\alpha}(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \cdot \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi t}{l} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^{\alpha+1}} + \frac{2\theta\alpha}{n\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^2}, \ |\theta| \leqslant 1.$$

ასევე, გვაქვს

$$\left|\frac{1}{l} \int_\delta^l G_n^{l,\alpha}(t) dt\right| \le M_1(\alpha, \Delta)\left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha+1} + \frac{l}{n}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\delta}\right) 2\theta\alpha \to 0,$$

როცა $l, n \to \infty, \ \frac{l}{n} \to 0.$

$$\left|\frac{1}{l} \int_\Delta^l t G_n^{l,\alpha}(t) dt\right| \le \frac{l^\alpha}{A_n^\alpha \cdot 2^{\alpha+1}} \cdot \int_\Delta^l \frac{1}{t^\alpha} dt + \frac{l \cdot 2\theta\alpha}{n \cdot 4} \int_\Delta^l \frac{1}{t} dt$$
$$\le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{l}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{(1-\alpha)}\left(l^{1-\alpha} + \Delta^{1-\alpha}\right) + \frac{\theta\alpha}{2} \cdot \frac{l}{n}\left(ln(l) + \ln(\Delta)\right) \to 0,$$

როცა $\frac{l^2}{n^\alpha} \to 0.$

$$\left|\frac{1}{l}\int_{\Delta}^{l} t^2 G_n^{l,\alpha}(t)\right| \leq \frac{l^\alpha}{A_n^\alpha 2^{\alpha+1}} \cdot \int_{\Delta}^{l} t^{1-\alpha}dt + \frac{l}{n}\cdot\frac{2\theta\alpha}{4}\int_{\Delta}^{l} 1\cdot dt$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{\alpha+1}}\cdot\left(\frac{l}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{2-\alpha}\left(l^{2-\alpha}+\Delta^{2-\alpha}\right)+\frac{l}{n}\cdot\frac{\theta\alpha}{2}\cdot(1+\Delta)\to 0,$$
როცა $l, n \to \infty$ და $\frac{l^2}{n^\alpha} \to 0$.

ანალოგიურად დამტკიცდება ლემის მართებულობა $f(x-t)$ შემთხვევისთვის, თუ $f(x+t)$-ს ჩავანაცვლებთ $f(x-t)$-თი ზემოთ ჩატარებულ გარდაქმნებში.

რაც შეეხება
$$\frac{1}{l}\int_{\delta}^{\Delta} f(x+t)G_n^{l;\alpha}(t)dt$$
0-კენ კრებადობას, ისევე მტკიცდება როგორც ლემა 3-ის შემთხვევაში. ■

თეორემა 8. *თუ სრულდება ლემა 3-ში მოცემული პირობა და ასევე,*
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2g(x)|dt = 0,\ \forall x\in[a,b], \tag{8}$$
და $f \in E$, მაშინ
$$\sigma_n^{l,\alpha}(x) \rightrightarrows g(x)$$
$[a,b]-$ზე, როცა $l, n \to \infty$, $\frac{l}{n} \to 0$.

დამტკიცება.

თუ გავითვალისწინებთ ამ პარაგრაფში ლემა 3-ის ჩამოყალიბებამდე მიღებულ შეფასებებს, მარტივი დასანახია რომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისისა შევაფასოთ $J_n^{l,\alpha}(x)$.

$$J_n^{l,\alpha}(x) = \frac{1}{l}\int_0^l (f(x+t)+f(x-t)-2g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt$$
$$=\frac{1}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{n}} + \int_{\frac{l}{n}}^{\delta} + \int_{\delta}^{l}\right)(f(x+t)+f(x-t)-2g(x))G_n^{l,\alpha}(t)dt$$
$$=A_n^{l,\alpha}(x)+B_n^{l,\alpha}(x)+C_n^{l,\alpha}(x).$$
შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\varphi_x(t) := f(x+t)+f(x-t)-2g(x),$$
$$\lambda(t) := \int_0^t |\varphi_x(u)|\,du.$$
(8) პირობიდან გამომდინარე $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ ისეთი, რომ $0 < t \leq \delta$

$\lambda(t) < \varepsilon \cdot t.$

ამის გათვალისწინებით გვექნება,

$$A_n^{l,\alpha}(x) \leq \left| \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{n}} \left| G_n^{l,\alpha}(t) \right| d\lambda(t) \right| \leq \frac{2n}{l} \lambda\left(\frac{l}{n}\right) < 2\varepsilon.$$

აგრეთვე,

$$B_n^{l,\alpha}(x) \leq \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{n}}^{\delta} \left| G_n^{l,\alpha}(t) \right| d\lambda(t) \leq \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} \cdot 2B_\alpha \int_{\frac{l}{n}}^{\delta} \frac{1}{t^{\alpha+1}} d\lambda(t)$$
$$= 2B_\alpha \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} \left[\frac{1}{\delta^{\alpha+1}} \lambda(\delta) - \frac{l\left(\frac{l}{n}\right)}{\left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha+1}} + (\alpha+2) \int_{\frac{l}{n}}^{\delta} \frac{1}{t^{\alpha+2}} \lambda(t) dt \right]$$
$$< 2B_\alpha \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} \cdot \varepsilon \left[\frac{1}{\delta^\alpha} + \left(\frac{n}{l}\right)^{\alpha} + (\alpha+1) \int_{\frac{l}{n}}^{\delta} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \right]$$
$$= 2B_\alpha \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha} \cdot \varepsilon \left[\frac{1}{\delta^\alpha} + \left(\frac{n}{l}\right)^{\alpha} + (\alpha+1) \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\delta^\alpha} + \left(\frac{n}{l}\right)^{\alpha} \right) \right] < D_\alpha \varepsilon.$$

რაც შეეხება $C_n^{l,\alpha}(x)$-ის შეფასებას, იმის გათვალისწინებით რომ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის გამოყენებით გვაქვს

$$\left| g(x) \cdot \frac{1}{l} \int_\delta^l G_n^{l,\alpha}(t) dt \right|$$
$$= \left| g(x) \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\pi t}{l} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{A_n^\alpha \left(2 \sin \frac{\pi t}{2l}\right)^{\alpha+1}} + \frac{2\theta\alpha}{n\left(2\sin\frac{\pi t}{2l}\right)^2} \right) dt \right|$$
$$= \mid g(x) \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\left(2\sin\frac{\pi\delta}{2l}\right)^{\alpha+1}} \int_\delta^\xi \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi t}{l} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{n^\alpha} dt$$
$$+ g(x) \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1 \cdot l^2}{4n\left(2\sin\frac{\pi\delta}{2l}\right)^2} \int_\delta^l \frac{2\theta\alpha}{t^2} dt \Bigg| \leq M_1(\alpha,\delta) \left(\frac{l}{n}\right)^{\alpha+1} \mid g(x) \mid$$
$$+ |g(x)| \frac{l}{n} \cdot \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\delta}\right) \cdot 2\theta\alpha \to 0,$$

როცა $l, n \to \infty$ და $\dfrac{l}{n} \to 0.$

მივიღებთ $C_n^{l,\alpha}(x) < \varepsilon$, რაც ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

■

თეორემა 9. *თუ სრულდება ლემა 4-ში მოცემული პირობა და ასევე,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2g(x)| dt = 0, \ \forall x \in [a,b], \tag{9}$$

და $f \in E$*, მაშინ*

$$\sigma_n^{l,\alpha}(x) \rightrightarrows g(x)$$

$[a,b]-$*ზე, როცა* $l, n \to \infty$, $\frac{l^2}{n^\alpha} \to 0.$

დამტკიცება. თეორემის მტკიცება მიმდინარეობს წინა თეორემის მტკიცების ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{l^2}{n^\alpha} \to 0 \implies \frac{l}{n} \to 0$. განსხვავება არის ის, რომ $[\delta, l]$ სეგმენტზე შესაბამისი ინტეგრალის შეფასება ხდება ლემა 4-ის გამოყენებით, ნაცვლად ლემა 3-ისა.

■

დასკვნა

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალების (C, α) საშუალოების, მოცემულ სეგმენტზე თანაბრად კრებადობისთვის საკმარისი პირობები. ასევე, მივიღეთ (C, α) გულების წარმოდგენის ისეთი ფორმა, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემა სასრულ სეგმენტზე ინტეგრებისას.

ლიტერატურა

[1] Taberski R., Convergence of some trigonometric sums, Demonstratio mathematica, 101-117, 1973.

[2] Taberski R., On general Dirichlet's integrals, Poznan, 499-512, 1974.

[3] Zygmund A., Trigonometric series, i, ii, Cambridge mathematical library, 2002.