ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

L^{∞} სივრცესთან ახლოს მდგომი ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების შესახებ

ნიკოლოზ დევდარიანი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: ასისტ. პროფ. შალვა ზვიადაძე

თბილისი 2023

შინაარსი

ანოტაცია

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა და მასში განიხილება ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები, რომელთათვისაც უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს.

ნაშრომში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობა მაჩვენებელზე, იმისათვის, რომ შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში უწვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენდეს ჩაკეტილ ქვესივრცეს. ნაშრომში მოყვანილი შედეგი წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვის მიღებული შედეგის ჯერად ანალოგს.

1 შესავალი

მეოცე საუკუნის მეორე ნახევარში ცხადი გახდა, რომ კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებს აღარ ძალუძთ მთელი რიგი პრობლემების გადაჭრა, რომლებიც ბუნებრივად ჩნდება არაწრფივი დრეკადობის თეორიის, სითხეთა დინების მექანიკისა და სხვადასხვა ფიზიკური მოვლენების მათემატიკურ მოდელებში არსებული კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნადობის საკითხების გამოკვლევისას. ამ გარემოებამ განაპირობა ახალი, არასტანდარტული ბანახის ფუნქციური სივრცეების შემოღება და მათი ინტენსიური გამოკვლევა. ერთ-ერთ ასეთ ფუნქციურ სივრცეს წარმოადგენს ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე.

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე ჯერ კიდევ მე-20 საუკუნის 30-იან წლებში შემოიღო ვ. ორლიჩმა. თავდაპირველად მათი შემოღება განპირობებული იყო თეორიული მოსაზრებებით, მაგრამ გასული საუკუნისა და ამ საუკუნის მიჯნაზე ინტერესი აღნიშნული სივრცეების მიმართ გაძლიერდა. ამ სივრცეთა მიმართ ინტერესი გაძლიერდა, ვინაიდან, უკანასკნელ წლებში გამოიკვეთა აღნიშნული სივრცეების გამოკვლევის არსებითი აუცილებლობა მრავალ გამოყენებით ამოცანაში. გამოყენების არეალიდან აღსანიშნავია ელექტრორეოლოგიური სითხეების მათემატიკური მოდელი.

ელექტრორეოლოგიური სითხეები ისეთი სითხეებია, რომელთა სიბლანტე იცვლება (ხშირად მკვეთრად) ელექტრული ველის ზემოქმედებით. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი სითხეები, ექსპერიმენტების საშუალებით, საკმაოდ კარგად არის შესწავლილი, სრული თეორიული მოდელი კვლავინდებურად არ არსებობს. სითხეთა დინამიკაში ამგვარ სითხეებს მოიხსენიებენ, როგორც არანიუტონისეულ სითხეებს. ერთ-ერთი მოდელი, რომელიც აქტიურად შეისწავლება, არის, როცა ენერგია მოიცემა შემდეგი ინტეგრალით

$$\int\limits_{\Omega} |Du(x)|^{p(x)} dx$$

სადაც Du არის სიბლანტის გრადიენტის სიმეტრიული ნაწილი, ხოლო მაჩვენებელი არის ელექტრული ველის ფუნქცია. აღნიშნული მოდელი შემოიღო რუზიცკამ (იხ. [17], [18]) და შემდეგში მის განვითარებაში მიიღეს მონაწილეობა ასერბიმ და მინჯიონიმ [1]. აღნიშნული მოდელის შესწავლისას წარმოქმნილმა პრობლემებმა მნიშვნელოვანი სტიმული მისცა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა და ცვლადმაჩვენებლიანი სობოლევის სივრცეების შესწავლას.

ზემოაღნიშნულის გარდა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები გამოიყენება სხვა ფიზიკური მოვლენების აღმწერ მათემატიკურ მოდელებშიც. მაგალითად: კვაზინიუტონისეული სითხეების, თერმისტორის (თერმო რეზისტორის) პრობლემის, ფოროვან გარემოში სითხეთა მოძრაობისა და მაგნიტოსტატიკის მათემატიკურ მოდელებში.

ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებს იყენებენ გამოსახულების აღდგენის ამოცანაშიც, [4] ნაშრომში ავ-

ტორებმა ჩათვალეს, რომ უფრო მკაფიო გამოსახულების მიღება შეიძლება ინტერპოლების გზით, რომელშიც გამოიყენება ცვლადი მაჩვენებელი. შესაბამისი ნორმა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\int_{\Omega} |\Delta u(x)|^{p(\Delta u)} dx$$

სადაც მაჩვენებელი $p(\cdot)$ მონოტონურად იკლებს 2-დან 1-მდე, როცა Δu იზრდება. უკანასკნელ წლებში აღნიშნული მიდგომა და მასთან დაკავშირებული საკითხები გადმოცემულია რიგ შრომებში. დიდი ნაწილი მოყვანილი გამოყენებისა გადმოცემულია შემდეგ მონოგრაფიებსა და შრომებში [1], [2], [4], [5], [7], [16], [17], [19].

როგორც დასახელებიდან ჩანს, ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე წარმოადგენს კლასიკური ლებეგის სივრცის განზოგადებას თუ მუდმივ p მაჩვენებელს ჩავანაცვლებთ არამუდმივი ფუნქციით $p(\cdot)$. ამგვარად მიღებულ ბანახის $L^{p(\cdot)}$ სივრცეს მრავალი მსგავსი თვისება აქვს კლასიკური L^p სივრცეებისა, თუმცა მრავალი განმასხვავებელი თვისებაც გააჩნია. მაგალითისთვის მოვიყვანთ მცირე ჩამონათვალს:

- $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში არაა შემოსაზღვრული ძვრის ოპერატორი $T_h : L^{p(\cdot)} \to L^{p(\cdot)}, T_h f(x) = f(x+h)$;
- ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცისთვის ანალოგი არა აქვს იუნგის უტოლობას ნახვევისთვის

  $$\|f * g\|_{L^r} \le C\|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q},$$

  სადაც $1 + 1/r = 1/p + 1/q$;
- ასევე ანალოგი არა აქვს ცვლადი მაჩვენებლისთვის შემდეგ ფორმულას

  $$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| dt;$$
- მაქსიმალური, პუანკარეს, სობოლევის და სხვა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი უტოლობა მოდულარის ფორმით არაა სამართლიანი ცვლადი მაჩვენებლების შემთხვევაში. მაგალითისთვის ლერნერმა [15] აჩვენა, რომ უტოლობა

  $$\int_{R^n} |Mf(x)|^{p(x)} dx \le C \int_{R^n} |f(x)|^{p(x)} |dx$$

  სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მაჩვენებელი მუდმივია $p(x) = p$ და $p \in (1; \infty)$.

ზემო აღნიშნული შრომების უმრავლესობაში გამოიკვეთა აუცილებლობა ჰარმონიული ანალიზის მეთოდებისა და შედეგების ანალოგების დადგენისა ცვლადმაჩვენებლიან სირვცეებში. მალევე ნათელი გახდა, რომ უმთავრესი პრობლემაა განისაზღვროს $p(\cdot)$ მაჩვენებელზე დადებული პირობები იმგვარად,

რომ ჰარმონიული ანალიზის კლასიკური ოპერატორები, როგორებიცაა: მაქსიმალური ოპერატორი, სინგულარული ინტეგრალები, წილადური ინტეგრალები და სხვა იყოს შემოსაზღვრული $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში.

აღნიშნული თემატიკა ახალია და სწრაფად მზარდი. მის მიმართ ინტერესი სულ უფრო იმატებს, მრავალი გამოჩენილი ქართველი თუ უცხოელი მეცნიერი სწავლობს აღნიშნულ პრობლემატიკას.

ედმუნდსმა, გოგატიშვილმა და კოპალიანმა [9] ნაშრომში ააგეს ისეთი მაჩვენებელი, რომ შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს. ამ თვისებაზე დაყრდნობით მათ შეძლეს, აეგოთ კოლმოგოროვისა და მარცინკევიჩის ტიპის ფუნქციები (ფუნქციები, რომელთა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწრკივები განშლადია თითქმის ყველგან) მიღებული ფუნქციური სივრცის ასოცირებულ სივრცეში. აღნიშნული ნაშრომის შემდეგ გაჩნდა მოტივაცია, დახასიათებულიყო მაჩვენებელი ფუნქციები, რომელთა შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ფუნქციურ სივრცეებში უყვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს. ამ უკანასკნელი ამოცანის გადაჭრა მოხერხდა კლებადი გადანაცვლების ტერმინებში [13]. ამ შედეგზე დაყრდნობით კი [12] ნაშრომში ავტორებმა დაამტკიცეს ბოჩკარიოვის შედეგის ანალოგი, კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ ყოველი ერთობლივ შემოსაზღვრული ორთონორმირებული სისტემისთვის შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში არსებობს ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი მოცემული სისტემის მიმართ განშლადია დადებითი ზომის სიმრავლეზე.

ზემოთ მოყვანილი შედეგები მიღებულია ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის, წინამდებარე ნაშრომის მიზანია, დავადგინოთ [13] ნაშრომში მიღებული შედეგის ანალოგის დადგენა ჯერად შემთხვევაში, ანუ დავახასიათოთ მაჩვენებელი ფუნქციები, რომელთა შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ფუნქციურ სივრცეებში უყვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენს ჩაკეტილ ქვესივრცეს.

2 განსაზღვრებები და დამხმარე დებულებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ განსაზღვრებებსა და დამხმარე დებულებებს, აგრეთვე გარკვეულ მსჯელობებს, რომელიც საჭიროა ნაშრომში დასახული მიზნების მისაღწევად.

2.1 ბანახის ფუნქციური სივრცე

მას შემდეგ, რაც ლებეგის ფუნქციური სივრცის ცნებამ მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მათემატიკის განვითარებაში, მრავალმხრივ განზოგადდა ეს ცნება, გამოჩნდა, ეგრეთწოდებული, ორლიჩის სივრცეები, მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცეები და ა. შ. აღნიშნული მიმართულებით ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი როლი უჭირავს ე.წ. ბანახის ფუნქციურ სივრცეს. ქვემოთ მოვიყვანთ მის განსაზღვრებას და მასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ მნიშვნელოვან ფაქტს.

ვთქვათ, რომ $\Omega \subset R^n$ და $\mathscr{M}$ არის Ω-ზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციების სიმრავლე. ეს სიმრავლე შეგვიძლია, აღვჭურვოთ ტოპოლოგიით, რომელიც ინდუცირებულია ზომით კრებადობით. დავუშვათ, ზომადი $E \subset \Omega$ სიმრავლისთვის $m(E)$ აღნიშნავს E სიმრავლის ლებეგის ზომას, ხოლო χ_E აღნიშნავს E სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

განსაზღვრება 1. ტოპოლოგიური $\mathscr{M}$ სივრცის ბანახის X ქვესივრცეს ეწოდება ბანახის ფუნქციური სივრცე Ω-ზე თუ

1. ნორმა $\|f\|_X$ განსაზღვრულია ყოველი ზომადი ფუნქციისთვის და $f \in X$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\|f\|_X < \infty$. $\|f\|_X = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $f = 0$ თითქმის ყველგან;
2. ყოველი $f \in X$ ფუნქციისთვის $\||f|\|_X = \|f\|_X$;
3. თუ $0 \le f \le g$ თითქმის ყველგან, მაშინ $\|f\|_X \le \|g\|_X$;
4. თუ $0 \le f_n \uparrow f$ თითქმის ყველგან, მაშინ $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$;
5. თუ $E \subset \Omega$-ს ისეთი ზომადი ქვესიმრავლეა, რომ $m(E) < \infty$, მაშინ $\|\chi_E\|_X < \infty$;
6. ყოველი ზომადი E სიმრავლისთვის, რომლისთვისაც $m(E) < \infty$, არსებობს მუდმივა $C_E < \infty$ ისეთი, რომ
$$\int_E f(t)dt \le C_E \|f\|_X.$$

განსაზღვრება 2. ბანახის ფუნქციური X სივრცის ასოცირებული სივრცე X' განისაზღვრება შემდეგი სახით
$$X' = \left\{ g \ : \ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx < \infty, \ \forall f \in X \right\}.$$
ასოცირებული X' სივრცეზე ნორმა შემოდის შემდეგი სახით
$$\|f\|_{X'} = \sup \left\{ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \ : \ \|g\|_X \le 1 \right\}.$$

ამ განსაზღვრების პირდაპირი შედეგი არის განზოგადებული ჰელდერის უტოლობა: ყოველი $f \in X$ და $g \in X'$ ფუნქციებისთვის
$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \le \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$
ამასთანავე, X'-იც ბანახის ფუნქციური სივრცეა Ω-ზე და $(X')' = X$. X-ის ასოცირებული სივრცე, X-ის შეუღლებული X^* სივრცის ჩაკეტილი, ნორმირებული ქვესივრცეა და ტოლობა
$$\|f\|_X = \sup \left\{ \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \ : \ \|g\|_{X'} \le 1 \right\}$$

სრულდება ყველა $f \in X$ ფუნქციისთვის.

ქვემოთ მოვიყვანთ ბანახის ფუნქციური სივრცის რამდენიმე მნიშვნელოვანი ქვესივრცის განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ f ფუნქციას აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა X-ში, თუ $\|f_{\chi_{E_n}}\| \to 0$, $n \to \infty$, სადაც $\{E_n\}$ არის Ω-ს ზომადი ქვესიმრავლეების მიმდევრობა ისეთი, რომ $\chi_{E_n} \downarrow 0$, $n \to \infty$ თ.ჸ. ყველა ასეთი ფუნქციის სიმრავლე X სივრციდან აღვნიშნოთ X_A სიმბოლოთი. X_B სიმბოლოთი კი აღვნიშნოთ შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლის ჩაკეტვა X სივრცეში. ვიტყვით, რომ $f \in X$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი ნორმა X-ში, თუ ყოველი $x \in \Omega$ წერტილისთვის გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \|f\chi_{B(x,\varepsilon)}\| = 0,$$

სადაც $B(x,\varepsilon)$ არის ბირთვი ცენტრით x წერტილში და რადიუსით ε. სიმრავლე ყველა ასეთი ფუნქციისა აღვნიშნოთ X_C სიმბოლოთი.

ახლა კი ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ თეორემას, რომელსაც დავეყრდნობით ძირითადი შედეგის დამტკიცებისას და რომელიც წარმოადგენს [9] ნაშრომში მიღებული შესაბამისი დებულების ჯერად ანალოგს. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\Omega := [0;1]^n$ და X იყოს ბანახის ფუნქციური სივრცე Ω-ზე.

თეორემა 1. *იმისათვის, რომ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $C(\Omega)$ იყოს X-ის ჩაკეტილი ქვესივრცე აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს $c > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $I \subset \Omega$ მართკუთხედისთვის*

$$\|\chi_I\|_X \geq c. \tag{1}$$

დამტკიცება. საკმარისობა. პირობის საკმარისობისთვის ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი C რიცხვი, რომ ყოველი $f \in C(\Omega)$ ფუნქციისთვის

$$C\|f\|_C \leq \|f\|_X \leq \|f\|_C. \tag{2}$$

მოცემული ორმაგი უტოლობის მარჯვენა უტოლობა აშკარაა, იმ დაშვებით, რომ $\|\chi_\Omega\| = 1$. ვინაიდან,

$$|f(x)| = |f(x) \cdot \chi_\Omega(x)| \leq \|f\|_C \cdot \chi_\Omega(x).$$

ბანახის ფუნქციური სივრცის განსაზღვრებიდან მივიღებთ

$$\|f\|_X = \||f|\|_X \leq \|\chi_\Omega\|_X \cdot \|f\|_C = \|f\|_C.$$

უტოლობა (2)-ის მარცხენა უტოლობის სამართლიანობის საჩვენებლად ავიღოთ $f \in C(\Omega)$, მაშინ არსებობს ისეთი $x_0 \in \Omega$, რომ $\|f\|_C = f(x_0)$; f ფუნქციის უწყვეტობის ძალით, არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $x \in E := \Omega \cap B(x_0,\varepsilon)$ წერტილისთვის $|f(x_0)| \leq 2|f(x)|$, სადაც $B(x_0,\varepsilon) :=$

$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x - x_0|| < \varepsilon\}$ არის ε რადიუსიანი ღია ბირთვი ცენტრით x_0 წერტილში. ახლა განვიხლოთ n განზომილებიანი მართკუთხედი $I = [a_1; b_1] \times ... \times [a_n; b_n]$, სადაც $0 \leq a_i < b_i \leq 1$, $i \in \{1, ..., n\}$. n განზომილებიანი ევკლიდური $\mathbb{R}^n$ სივრცის თვისებების გამო, ცხადია, არსებობს ისეთი I მართკუთხედი, რომ $I \subset E$. მაშინ (1)-ის ძალით გვაქვს

$$\|f\|_C = |f(x_0)| \leq \frac{1}{c} \cdot |f(x_0)| \cdot \|\chi_I\|_X \leq \frac{2}{c} \|f \chi_I\|_X \leq \frac{2}{c} \|f\|_X.$$

აუცილებლობა. თუ უწყვეტ ფუნქციათა $C(\Omega)$ სივრცე X სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცეა, მაშინ ბანახის თეორემის ძალით (ჩაკეტილი გრაფიკის შესახებ) მივიღებთ (2)-ს. მართლაც, განვიხილოთ იგივური ასახვის ოპერატორი $i : (C(\Omega), X) \to C(\Omega)$, $i(f) = f$. ვინაიდან, $C(\Omega)$ ჩაკეტილია X სივრცეში, მაშინ მივიღებთ, რომ i ოპერატორის გრაფიკი ჩაკეტილია, აქედან კი ბანახის თეორემის ძალით გამომდინარეობს, რომ მოცემული ოპერატორი შემოსაზღვრულია, ე.ი., არსებობს $C > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $f \in C(\Omega)$ ფუნქციისთვის გვაქვს $||f||_C \leq C \cdot ||f||_X$. მეორეს მხრივ (2) ორმაგი უტოლობის მარჯვენა უტოლობა ტრივიალური და შესაბამისად მივიღეთ (2).

ახლა კი რაიმე $I \in \Omega$ მართკუთხედისთვის განვიხილოთ უწყვეტი $g \in C(\Omega)$ ფუნქცია, ისეთი, რომ ყოველი $x \in \Omega$ წერტილისთვის გვაქვს $g(x) \leq \chi_I(x)$ და $||g||_C = 1$, მაშინ (2)-ის ძალით მივიღებთ:

$$C \cdot ||g||_C \leq ||g||_X \leq ||g||_C \cdot ||\chi_I||_X.$$

ეს უტოლობა კი არის დასამტკიცებელი (1). ■

2.2 ორლიჩისა და მარცინკევიჩის სივრცეები

მარცინკევიჩისა და ორლიჩის სივრცეები დიდ როლს თამაშობენ ფუნქციათა თეორიასა და მათ გამოყენებებში. ჯერ მოვიყვანთ ორლიჩის სივრცის განსაზღვრებას. დავუშვათ, $\psi : [0; \infty) \to [0; \infty)$ არის იუნგის ფუნქცია, ანუ ქვემოდან ამოზნექილი ფუნქცია ისეთი, რომ $\psi(0) = 0$ და

$$\frac{\psi(x)}{x} \to \infty, \ \ x \to \infty; \quad \ \frac{\psi(x)}{x} \to 0, \ \ x \to 0+.$$

სიმრავლე ყველა ისეთი $f \in \mathscr{M}$ ფუნქციებისა, რომელთათვისაც არსებობს $\lambda > 0$ რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\int_\Omega \psi \left(\frac{|f(t)|}{\lambda} \right) dt < \infty.$$

აღვნიშნოთ $L_\psi(\Omega)$ სიმბოლოთი, თუ ამ სიმრავლეზე შემოვიღებთ ლუქსემბურგის ნორმას

$$\|f\|_\psi = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \psi \left(\frac{|f(t)|}{\lambda} \right) dt \leq 1 \right\},$$

მაშინ მიიღებულ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს $L^{\psi}(\Omega)$ ვუწოდებთ ორლიჩის სივრცეს.

ახლა კი მოვიყვანოთ მარცინკევიჩის სივრცის განსაზღვრება. დავუშვათ, მოცემული გვაქვს $[0;\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული არაკლებადი φ ფუნქცია ისეთი, რომ $\varphi(0) = 0$ და $\varphi(t)/t$ არაზრდადია. განვსაზღვროთ დადებითად ერთგვაროვანი ამოზნექილი ფუნქციონალი

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup_{0<t\leq 1} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t f^*(u)du,$$

სადაც f^* წარმოადგენს f ფუნქციის კლებად გადანაცვლებას, ანუ

$$f^*(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \,:\, m(\{|f| > \lambda\}) \leq x\}.$$

განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს, რომ f^* არის კლებადი მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია. მეტიც, ფუნქციები $|f|$ და f^* თანაზომადები არიან.

მარცინკევიჩის სივრცე აღვნიშნოთ M_φ სიმბოლოთი, როგორც ყველა ზომად f ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\|f\|_{M_\varphi} < \infty$.

როგორც ცნობილია (იხ. [14]) $(M_\varphi)_A = (M_\varphi)_B$, ამასთან $(M_\varphi)_A$ შეიძლება დავახასიათოთ როგორც სიმრავლე ისეთი $f \in \mathscr{M}$ ფუნქციებისა, რომ

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{\varphi(t)} \int_0^t f^*(u)du = 0. \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\psi(t) = e^t - 1$ და $\varphi(t) = t\ln(e/t)$, მაშინ შესაბამისი ორლიჩისა და მარცინკევიჩის სივრცეები ემთხვევა (იხ. [3]) და შემდგომ აღვნიშნავთ ამ სივრცეებს შესაბამისად e^L და $M_{\ln}$ სიმბოლოებით. ასევე მართებულია შემდეგი ექვივალენტობა (იხ. [10, შედეგი 3.4.28])

$$\|f\|_{e^L} \asymp \|f\|_{M_{\ln}} \asymp \sup_{0<t\leq 1} \frac{f^*(t)}{\ln(e/t)}. \tag{4}$$

2.3 ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე

მოცემულია ზომადი ფუნქცია $p \,:\, \Omega \to [1;\infty)$. სიმბოლო $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ აღნიშნავს Ω სიმრავლეზე განსაზღვრულ ისეთ ზომად f ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელთათვის არსებობს $\lambda > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx < \infty.$$

ეს სიმრავლე ხდება ბანახის ფუნქციური სივრცე, როდესაც აღჭურვილია ნორმით

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

მოცემული $p(\cdot)$ ფუნქციის ჰელდერის აზრით შეუღლებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $p'(\cdot)$ სიმბოლოთი და იგი განისაზღვრება წერტილოვნად $p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$, $x \in \Omega$. მოცემული $Q \subset \Omega$ სიმრავლისთვის შემოვიღოთ ზოგიერთი სტანდარტული აღნიშვნა:

$$p_-(Q) := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q} p(x), \quad p_+(Q) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} p(x), \quad p_- := p_-(\Omega), \quad p_+ := p_+(\Omega).$$

ზემოთ მოყვანილ ტერმინებში $p(\cdot)$ მაჩვენებლისთვის გვაქვს $1 \le p_- \le p_+ < \infty$. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცის ასოცირებული სივრცე მოიცავს ყველა ზომად f ფუნქციას, რომლისთვისაც

$$\|f\|'_{(L^{p(\cdot)})'} = \sup\left\{\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \ : \ g \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \|g\|_{p(\cdot)} \le 1\right\} < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცის ასოცირებული სივრცე და $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ სივრცე ერთმანეთს ემთხვევა და $\|\cdot\|'_{(L^{p(\cdot)})'}$ და $\|\cdot\|_{p'(\cdot)}$ არიან ექვივალენტური ნორმები. ასევე გვაქვს

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \le C\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}, \quad f \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \quad g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega).$$

პირიქით, ყველა $f \in L^{p(\cdot)}[0;1]$-თვის

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le C \sup \int_{[0;1]} |f(x)g(x)|dx,$$

სადაც სუპრემუმი აღებულია ყველა $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$-ს მიმართ, სადაც $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$. უფრო მეტი საინტერესო შედეგები, აღნიშნულ სივრცეთა შესახებ, მკითხველს შეუძლია, იხილოს მონოგრაფიებში [8] და [6].

აქ მოვიყვანთ [11] ნაშრომში დამტკიცებულ დებულებას, რომელსაც მომავალში დავეყრდნობით ჩვენი ძირითადი შედეგის დამტკიცებისას.

თეორემა 2. *დავუშვათ, მოცემულია $p : \Omega \to [1;\infty)$. $(L^{p(\cdot)}(\Omega))_A = (L^{p(\cdot)}(\Omega))_B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $c > 1$ რიცხვისთვის*

$$\int_0^1 c^{p^*(t)}dt < \infty.$$

3 L^∞ სივრცესთან ახლოს მდგომი ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებს, რომლებიც ახლოს არიან L^∞ სივრცესთან იმ აზრით, რომ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე ჩაკეტილი ქვესივრცეა შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეში. კერძოდ, დავახასიათებთ მაჩვენებელ ფუნქციებს კლებადი გადანაცვლების ტერმინებში, რომელთა შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა

სივრცე არის ჩაკეტილი ქვესივრცე. აღვნიშოთ, რომ დებულება, რომელსაც ამ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ, წარმოადგენს [13] ნაშრომში განხილული ძირითადი დებულების ჯერად ანალოგს.

მოცემული p ფუნქციისთვის $W(p)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ p-ს თანაზომადი ფუნქციათა კლასი, ხოლო p^* სიმბოლოთი კი p-ს კლებადი გადანაცვლება. აგრეთვე გავიხსენოთ, რომ $\Omega := [0;1]^n$ და $I := [a_1;b_1] \times ... \times [a_n;b_n]$, სადაც $0 \le a_i < b_i \le 1$, $i \in \{1,...,n\}$. ახლა კი ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ მოცემული ნაშრომის ძირითად დებულებას.

თეორემა 3. *მოცემულია ზომადი $p : \Omega \to [1;\infty)$ ფუნქცია. იმისათვის, რომ იარსებოს $\bar{p} \in W(p)$ ფუნქციამ, რომლის შესაბამის $L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega)$ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში $C(\Omega)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე ჩაკეტილი ქვესივრცეა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ*

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{p^*(t)}{\ln(e/t)} > 0. \tag{5}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვინაიდან, სივრცე $C(\Omega)$ ჩაკეტილია $L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega)$-ში, მაშინ თეორემა 1-ის ძალით არსებობს დადებითი მუდმივი რიცხვი d ისეთი, რომ $d \le ||\chi_I||_{\bar{p}(\cdot)}$ ყოველი $I \in \Omega$ მართკუთხედისთვის. მაგრამ აქედან გამომდინარეობს, რომ $(L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega))_A \ne (L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega))_B$. მაშინ თეორემა 2-ის ძალით არსებობს $c > 1$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\int_0^1 c^{p^*(t)} dt = \infty. \tag{6}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) $p^*(\cdot) \in e^L$; ბ) $p^*(\cdot) \notin e^L$.

ა) ვინაიდან, სრულდება (6), მაშინ p^* ფუნქციას არ გააჩნია აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა და შესაბამისად $p^*(\cdot) \in e^L \setminus (e^L)_A$. მაშინ (4)-ის ძალით მივიღებთ, რომ $p^*(\cdot) \in M_{\ln} \setminus (M_{\ln})_A$, მაგრამ, მაშინ (3)-ის ძალით გვექნება

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{1}{t \cdot \ln(e/t)} \int_0^t p^*(u)du > 0.$$

ამ უკანასკნელი შეფასებიდან კი მივიღებთ (5)-ს.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{p^*(t)}{\ln(e/t)} = 0,$$

მაშინ (4)-ის ძალით დავადგენთ, რომ

$$\sup_{t\in(0;\varepsilon)} \frac{p^*(t)}{\ln(e/t)} \asymp \left\| p^*(\cdot) \cdot \chi_{(0;\varepsilon)} \right\|_{M_{\ln}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ p^* ფუნქციას აქვს აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა $M_{\ln}$ (და ასევე e^L) სივრცეში, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას.

ბ) ვინაიდან, $p^*(\cdot) \notin e^L$, მაშინ (4)-ის ძალით

$$\sup_{0<t\le 1} \frac{p^*(t)}{\ln(e/t)} = +\infty,$$

ამ შეფასებიდან კი ცალსახად გამომდინარეობს (5). ამით თეორემაში მოყვანილი პირობის აუცილებლობის დამტკიცება დასრულდა.

საკმარისობა. დავუშვათ, სრულდება (5). განვსაზღვროთ ფუნქცია $h(t) := \min\{p^*(t), \ln(e/t)\}$ ყოველი $t \in (0;1]$ წერტილისათვის. მაშინ h ფუნქციის განსაზღვრების და (5) პირობის ძალით

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{h(t)}{\ln(e/t)} > 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არსებობს მიმდევრობა $t_k \downarrow 0$, $k \to \infty$ ისეთი, რომ

$$\frac{h(t_k)}{\ln(e/t_k)} \ge d, \quad k \in \mathbb{N},$$

რაიმე დადებითი d რიცხვისთვის. (t_k) მიმდევრობიდან ამოვარჩიოთ (t_{k_n}) ქვემიმდევრობა ისეთი, რომ $2t_{k_{n+1}} < t_{k_n}$, ყოველა ნატურალური n რიცხვისთვის. ვინაიდან, $t_k \downarrow 0$, $k \to \infty$, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია ამგვარი ქვემიმდევრობის ამორჩევა, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (t_k) მიმდევრობა თავიდანვე ასეთია.

განვსაზღვროთ უბანუბან მუდმივი f ფუნქცია შემდეგი წესით

$$f(t) := d \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ln(e/t_k) \cdot \chi_{(t_{k+1};t_k]}(t); \quad f(t) = 1,\ t \in (t_1; 1].$$

ვინაიდან, h ფუნქცია კლებადია, ამიტომ ცხადია, რომ $h(t) \ge f(t), t \in (0;1]$. ახლა ავიღოთ რაიმე დადებითი $c > e^{1/d}$ რიცხვი, მაშინ მივიღებთ

$$\int_0^1 c^{h(t)} dt = \infty. \tag{7}$$

მართლაც,

$$\int_0^1 c^{h(t)} dt \ge \int_0^1 c^{f(t)} dt > \int_{t_{k+1}}^{t_k} c^{d\cdot\ln(e/t_k)} dt =$$

$$= (t_k - t_{k+1}) \cdot e^{d\cdot\ln c\cdot\ln(e/t_k)} dt > \frac{t_k}{2} \cdot \left(\frac{e}{t_k}\right)^{d\cdot\ln c} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

ავიღოთ კლებადი $\{a_k\}_{k\in N}$ რიცხვითი მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\int_{a_{k+1}}^{a_k} c^{h(t)} dt = 1.$$

(6)-ს გამო ასეთი მიმდევრობა ყოველთვის არსებობს. ახლა განვსაზღვროთ $\Delta_k := [a_{k+1}; a_k]$ ინტერვალთა მიმდევრობა და $E := \{r_k \ : \ k \in N\}$ იყოს რაიმე თვლადი, ყველგან მკვრივი სიმრავლე

$[0;1]$ ინტერვალში. განვსაზღვროთ $b_k := -a_{k+1} + r_k$ რიცხვითი მიმდევრობა და $A_k := \Delta_k + b_k = [r_k; r_k + a_k - a_{k+1}]$ ინტერვალთა მიმდევრობა. ახლა კი შემოვიღოთ ფუნქციათა მიმდევრობა შემდეგი წესით $g_k(t) := h(t) \cdot \chi_{\Delta_k}(t)$, $k \in \mathbb{N}$. განვსაზღვროთ $p_k(t)$ ფუნქციათა მიმდევრობა რეკურენტული წესით

$$p_1(t) := g_1(t - b_1) \cdot \chi_{[0;1]}(t);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_k(t) := (p_{k-1}(t) \cdot (1 - \chi_{\Delta_k}(t - b_k)) + g_k(t - b_k)) \cdot \chi_{[0;1]}(t), \ \ k > 1.$$

ვინაიდან, $h(t)$ კლებადია აქედან გამომდინარეობს, რომ $p_k(t) \leq p_{k+1}(t)$ ყველა $t \in [0;1]$ და $k \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის. ასევე ყველა $k \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$\int_0^1 p_k(t)dt \leq \int_0^1 h(t)dt \leq \int_0^1 \ln(e/t)dt = 2. \tag{8}$$

ახლა განვსაზღვროთ $q(\cdot)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$q(t) := \lim_{k\to\infty} p_k(t), \ \ t \in [0;1].$$

(8)-ის ძალით დავასკვნით, რომ ფუნქცია $q(\cdot)$ თითქმის ყველგან სასრულია და მისი აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $q^*(t) \leq h(t) \leq p^*(t)$. ახლა ცნობილი შედეგის ([3, თავი 2, თეორემა 7.5]) ძალით არსებობს ზომის შემნახველი გარდაქმნა $\omega : [0;1] \to [0;1]$ ისეთი, რომ $q(t) = q^*(\omega(t))$. ახლა კი განვსაზღვროთ $\hat{p}(t) := p^*(\omega(t))$, $t \in [0;1]$. ვინაიდან, $q^*(t) \leq p^*(t)$ ცხადია, რომ $q^*(\omega(t)) \leq p^*(\omega(t))$, მაშინ ყოველი $t \in (0;1)$-სთვის გვაქვს შემდეგი უტოლობა:

$$q(t) \leq \hat{p}(t). \tag{9}$$

ახლა კი ავაგოთ $\bar{p} : \Omega \to [1,\infty)$ მაჩვენებელი ფუნქცია, რომლის შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე იქნება ჩაკეტილი ქვესივრცე. ამისთვის განვსაზღვროთ ზომის შემნახველი ასახვა $\rho : \Omega \to [0;1]$ შემდეგი წესით: დავუშვათ, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ და ყოველი $i \in \{1, ..., n\}$ ინდექსისთვის შესაბამისი კოორდინატის წარმოდგენა იყოს შემდეგი $x_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}...$, მაშინ $\rho(x) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$. აღნიშნული ასახვა კარგადაა ლიტერატურიდან ცნობილი, იგი ბიექციურ შესაბამისობას ამყარებს Ω და $[0;1]$ სიმრავლეებს შორის. ამგვარად შეგვიძლია განვსაზღვროთ საძიებელი მაჩვენებელი ფუნქცია $\bar{p}(x) = \hat{p}(\rho(x))$. დამტკიცების დასასრულებლად უნდა შევამოწმოთ, რომ შესაბამის $L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე იქნება ჩაკეტილი ქვესივრცე. ამისთვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს დადებითი K რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $I \in \Omega$ მართკუთხედისთვის გვაქვს $||\chi_I||_{\bar{p}} \geq K$. განვიხილოთ რაიმე $c > 1$ რიცხვი და ვინაიდან, ორობით რაციონალურ

რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ამიტომ მოცემული n განზომილებიანი მართკუთხედისთვის მოიძებნება n განზომილებიანი ორობითი I^d მართკუთხედი, ისეთი, რომ $I^d \subset I$. მაშინ ρ ფუნქციის თვისებების, $c > 1$ და (9)-ის ძალით გვექნება

$$\int_I c^{\bar{p}(x)} dx \geq \int_{I^d} c^{\bar{p}(x)} dx = \int_{(I^d)'} c^{\hat{p}(t)} dt \geq \int_{(I^d)'} c^{q(t)} dt,$$

სადაც $(I^d)'$ აღნიშნავს ერთგანზომილებიან ორობით ინტერვალს $[0;1]$ ინტერვალიდან, რომლისთვისაც $\rho(I^d) = (I^d)'$. q ფუნქციის აგებიდან გამომდინარე, არსებობს რიცხვი $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $A_{k_0} \subset (I^d)'$, მაშინ ინტეგრალის მონოტონობისა და ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\int_{(I^d)'} c^{q(t)} dt \geq \int_{A_{k_0}} c^{q(t)} dt \geq \int_{A_{k_0}} c^{p_{k_0}(t)} dt =$$

$$= \int_{A_{k_0}} c^{g_{k_0}(t-b_{k_0}} dt = \int_{r_{k_0}}^{r_{k_0}+a_{k_0}-a_{k_0+1}} c^{h(t-b_{k_0}) \cdot \chi_{\Delta_{k_0}}(t-b_{k_0})} dt =$$

$$= \int_{a_{k_0+1}}^{a_{k_0}} c^{h(t)} dt = 1.$$

საბოლოოდ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში ნორმის განსაზღვრებისა და ზემოთ მიღებული შეფასების ძალით დავასკვნით, რომ ყოველი n განზომილებიანი $I \subset \Omega$ მართკუთხედისთვის $||\chi_I||_{\bar{p}} > 1/c$. ამ უკანასკნელი შეფასებიდან კი თეორემა 1-ის ძალით ვასკვნით, რომ $L^{\bar{p}(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე ჩაკეტილი ქვესივრცეა. ამით სრულდება თეორემაში მოყვანილი პირობის საკმარისობის დამტკიცება და, მაშასადამე, თეორემა დამტკიცებულია. ■

დასკვნა

ნაშრომი კვლევითია და იგი ეხება ე.წ. ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებს. ნაშრომში დახასიათებულია მაჩვენებელი ფუნქციების კლასი კლებადი გადანაცვლების ტერმინებში, რომელთა შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებს აქვთ თვისება, რომ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე წარმოადგენს მოცემული სივრცის ჩაკეტილ ქვესივრცეს.

დამტკიცებულია 2 თეორემა, რომლებიც წამოადგენენ [9] და [13] ნაშრომებში განხილული შედეგების ჯერად ვარიანტებს.

ლიტერატურა

[1] E. Acerbi and G. Mingione, Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth, Arch. Ration. Mech. Anal. 156 (2001), 121-140.

[2] S. N. Antontsev, J. I. Diaz and S. Shmaraev, Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 48. (Boston, MA: Birkhauser Boston Inc.)

[3] C. Bennet, R. Sharpley, Interpolation of Operators, Pure Appl. Math., vol. 129, Academic Press, 1988.

[4] P. Blomgren, T. Chan, P. Mulet, and C. K.Wong, Total variation image restoration: numericalmethods and extensions. In Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing, volume III, pages 384–387, 1997.

[5] Y. Chen, S. Levine and M. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), No.4.

[6] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Fundations and Harmonic Analysis, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser, Basel. 2013.

[7] L. Diening, Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D. thesis, University of Freibburg, Germany, 2002.

[8] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlang, Berlin, 2011.

[9] D. Edmunds, A. Gogatishvili, T. Kopaliani, Construction of Function Spaces Close to L^∞ with Associate Space Close to L^1, J. Fourier Anal. Appl., 24, (2018), 1539–1553.

[10] D. Edmunds, D. Evans, Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings, Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.

[11] D. Edmunds, J. Lang, A. Nekvinda, On $L^{p(x)}$ norms, Proc. R. Soc. Lond. Ser., A 455, (1999), 219–225.

[12] T. Kopaliani, N. Samashvili, Sh. Zviadadze, Divergent Fourier series in function spaces near $L^1[0;1]$, J. Math. Anal. Appl., 505, (2022), 125558.

[13] T. Kopaliani, Sh. Zviadadze, Note on the variable exponent Lebesgue function spaces close to L^∞, J. Math. Anal. Appl., 474, (2019), 1463–1469.

[14] S. Krein, Yu. Petunin, E. Semenov, Interpolation of Linear Operators, American Mathematical Society, Providence, 1982.

[15] A. K. Lerner, On modular inequalities in variable Lp spaces. Arch. Math. (Basel), 85 (6), (2005) 538-543.

[16] S. Levine, An adaptive variational model for image decomposition, Energy minimization methods in computer vision and pattern recognition. Springer Verlag LCNS no. 3757, 2005.

[17] M. Ruzicka, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory: Springer-Verlang, Berlin, 2000.

[18] M. Ruzicka, Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. Appl. Math., 49 (6), (2004), 565–609.

[19] V. Zhikov, Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system. (Russian), Differ. Uravn. 33 (1997), no.1, 107-114.